"十二五"职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

小学数学基础理论（第三版）

曹一鸣　曾小平　主编

教育科学出版社
ESPH Educational Science Publishing House

出 版 人　郑豪杰
责任编辑　张　静
版式设计　京久科创　孙欢欢
责任校对　马明辉
责任印制　叶小峰

图书在版编目（CIP）数据

小学数学基础理论/曹一鸣，曾小平主编. --3 版.
北京：教育科学出版社，2026.1. -- ISBN 978-7-5191-4706-8

Ⅰ. G623.502

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025HD8530 号

小学数学基础理论(第三版)

XIAOXUE SHUXUE JICHU LILUN

出版发行	教育科学出版社		
社　　址	北京市朝阳区安慧北里安园甲 9 号	**邮　　编**	100101
总编室电话	010-64981290	**编辑部电话**	010-64989394
出版部电话	010-64989487	**市场部电话**	010-64989009
传　　真	010-64891796	**网　　址**	http://www.esph.com.cn
经　　销	各地新华书店		
制　　作	北京京久科创文化有限公司		
印　　刷	三河市兴达印务有限公司	**版　　次**	2014 年 8 月第 1 版
开　　本	720 毫米×1020 毫米　1/16		2026 年 1 月第 3 版
印　　张	14.75	**印　　次**	2026 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	248 千	**定　　价**	38.00 元

目　录

第1章 数与运算

◉情境引入

在小学六年级“整理和复习”课上，教师让学生回顾六年来学过的各种数，分别举出生活中应用这些数的例子，并说明每种数的具体意义。在复习小数的意义时，教师指出，“分母是10，100，1000，…的分数叫十进分数，这样的分数可以用小数表示”；“小数是十进分数的另一种表示形式，例如，$\frac{4}{10}$可以写作0.4，$\frac{125}{100}$可以写作1.25，0.4和1.25都是小数”。

此时，有一个学生提出了这样一个问题：“循环小数0.333…可表示哪个十进分数？它是由十进分数改写的吗？”此时，教师马上意识到$\frac{1}{3}=0.333\cdots$，而$\frac{1}{3}$并不是十进分数，于是就说：“任何一个十进分数改写成的小数都是有限小数，至于循环小数是由哪些分数改写而成的，我们以后再研究吧！”

教师在课堂上虽然勉强地把这个问题应付过去了，但作为教师，应该知道循环小数并不是由十进分数改写而成的，更有甚者，那些无限不循环小数，它根本就不是任何一个分数的“另一种表示形式”。那么小数应该怎么定义呢？它有哪些性质、如何计算、与分数有着怎样的关系呢？

在小学阶段，类似的问题还有很多。比如，怎么证明乘法分配律呢？乘法分配律的价值到底在哪里呢？除法有分配律吗？竖式计算加减乘除的依据是什么？0为什么不能作除数？在四则混合运算中，为何先算乘除，后算加减？加、减、乘、除的具

体含义是什么？负数是怎么产生的？分数是怎么定义的？分数与整数有什么样的关系？小数的含义是什么？小数与分数各有什么特点？

这些是小学数学教学中经常遇到的问题，如果教师存在困惑，不能正确解答，将会影响数学课堂教学的科学性和有效性。《义务教育数学课程标准（2022 年版）》指出：“数是对数量的抽象，数的运算重点在于理解算理、掌握算法，数与运算之间有密切的关联。”基于此，本章主要阐述自然数、整数、小数和分数的数学本质和运算的算理与算法，进而对相关问题展开讨论。相信大家认真阅读本章后，对上述问题会有比较满意的回答，并对一些核心知识点的教学有整体的把握。

1.1 自然数

◉**学习目标**

- 了解自然数的产生历程，理解自然数的基数理论与序数理论。
- 理解十进制计数法，并能准确利用十进制计数法进行计数和读数。

1.1.1 自然数的产生

能分辨多与少，是动物的本能之一。一只狗面对一匹狼和一群狼的反应是不一样的；一只野猫和一群野猫面对一根骨头的反应也是不一样的。由此可见，一般的动物有一定的分辨数量的能力。

拓展阅读 乌鸦具有分辨数量的能力[①]

在欧洲某地庄园的望楼上有一个乌鸦巢，里面住着一只乌鸦。主人打算杀死这只乌鸦，可是几次都没有成功，因为他一走进这个望楼乌鸦就飞走，栖在远远的树上，直到他离开望楼才飞回来。

最后他想了一个聪明的办法：两个人一起走进望楼，一个人出来，一个人

① 丹齐克．数：科学的语言［M］．苏仲湘，译．上海：上海教育出版社，2001：2.

留在里面。可是乌鸦不上当，直到第二个人离开望楼才飞回来。主人不死心，连续试了几天：三个人，四个人，都没有成功。最后用了五个人，四个人走出来，一个人留在里面，乌鸦才分不清了，飞了回来。

人类同其他许多动物一样，在蒙昧时代就具有辨别事物多寡的能力，这就是原始的“数感”，后来逐渐发展成数概念。远古人类在狩猎、采集等社会生活中就注意到一只羊与一群羊、一个果子与一堆果子的区别，通过比较，逐渐意识到一只羊、一个山果、一棵树……之间存在共同的数量属性，这就是单位性，它构成了数量的基本单位。

同样，人类会注意到一双手、一对小鸟、两条鱼、两个石子等之间可以一一对应，且由两个基本单位构成，即存在数量上的共同属性。以此类推，抽象事物的这一数量属性，人们便形成数概念。当数概念越来越清晰时，人们便用语言、符号表示这些结果，即记数。

早期的数是自然数，它用来表示自然界中物体的个数，是“数数（shǔ shù）”数出来的。自然数，是人们日常生活中使用最多的数，它既可以清点物体数目，也可以编排物体的顺序。因此，自然数有基数与序数的双重属性。

一是基数属性，表示一个集合一共有几个元素，即表示元素的总个数。比如，我们用 3 表示集合 $\{a, b, c\}$ 有 3 个元素。

二是序数属性，表示某个元素的顺序位置。比如，元素 c 是集合 $\{a, b, c\}$ 的第 3 个元素。

拓展阅读 数的产生历程

数的原始本质在于表达多与少①。数的产生源于人类社会生产生活实践的需要，同时又促进人类社会的发展。从逻辑关系上看，自然数的产生大致需要经历以下几个阶段。

（1）分类，即根据事物的特点进行归类，把具有相应共同特征和属性的事物放在一起，便于研究和讨论。

（2）比较，即两种或两种以上的同类事物辨别异同或高下，便于更好地认识同类事物，人们常将事物按照大小、多少、高矮、长短、轻重等进行比较。

（3）多少，即把同类事物在数量上进行比较，考察它们数量（主要是离散量的个数）上的差异。

① 史宁中教授说：“数量的本质应当是多与少。”

(4) 数数（shǔ shù），即采用实物一一对应或口头叨念或心中默念等方式查点数目，逐个说出数目，这是对事物的数量进行比较精确的界定。

(5) 替代，即用具体事物（如石子、贝壳），以一一对应的形式替代要记录的物体，表述物体的数量。

(6) 记数，即用语言、符号、文字等替代物将数数的结果记录下来，便于日后使用，简单地说，就是记录数字。

早期的数主要指自然数，它容易和自然界中的事物建立对应关系，有直观形象的背景，在很大程度上是看得见的。而以后的数，如小数、分数、复数、四元数等数都是人类在自然数的基础上创造出来的，是比较抽象的，并不一定真实存在于自然界。

1.1.2 自然数的基数理论

自然数（Nature Number）的基数定义是建立在集合论的基础之上的。表示集合中元素个数的数叫作基数。有限集合的基数叫作自然数。

比如，$M=\{a, b, c\}$ 是一个集合，凡是能和 M 构成一一对应的集合，如 $N=\{1, 2, 3\}$、3 个人构成的集合、3 只羊构成的集合，都认为它们是等价的，可构成一类。它们具有相同的基数（元素个数相同），我们用自然数 3 表示这个基数。

以此类推，集合 $P=\{a\}$ 的基数是 1，集合 $Q=\{a, b\}$ 的基数是 2，空集 $\varnothing$ 的基数是 0。

根据自然数的基数理论，我们可以定义自然数的加法和乘法（详见 1.2）。

如何比较自然数 a 与 b 的大小呢？

根据自然数的基数理论，设 a 与 b 分别是集合 A 与 B 的基数：

如果 A 与 B 能够建立一一对应关系，那么 $a=b$；

如果 A 与 B 的真子集能够建立一一对应关系，那么 $a<b$；

如果 A 的真子集与 B 能够建立一一对应关系，那么 $a>b$。

1.1.3 自然数的序数理论

1889 年，意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932）在《算术原理新方法》中用公理化的方法从顺序的角度揭示了自然数的意义，称为自然数

的序数理论，或称为自然数的皮亚诺公理①。

一个集合 N 的元素间有一个基本的关系——后继（用$^+$表示），并满足下列四条公理。

（1）$1\in N$，对任意 $a\in N$，$a^+\neq 1$。

（2）任何 $a\in N$，有唯一的后继 a^+（$a=b\Rightarrow a^+=b^+$）。

（3）除 1 以外的任何元素，只能是一个元素的后继（$a^+=b^+\Rightarrow a=b$）。

（4）若 $M\subseteq N$，且满足①$1\in M$；②$a\in M\Rightarrow a^+\in M$，那么 $M=N$。

那么集合 N 的元素，就叫作自然数。

皮亚诺公理完整地刻画了自然数的序列。

（1）说明了 1 是第一个自然数。

（2）说明了任何一个自然数的后继唯一确定，即 $1^+=2$，$2^+=3$，…。

（3）说明了后继唯一确定前一个数，自然数中没有两个相等的数，如 5 是 4 的后继，4 是 3 的后继，3 是 2 的后继，2 是 1 的后继。

（4）说明了自然数集合是无限集。

皮亚诺公理又被称为归纳公理，是数学归纳法的原理。

根据上述定义，我们容易发现：自然数的本质是单位 1 的复合，即 1 是构成自然数的单位，前一个数加 1 得到后一个数。由此决定了自然数的特征：后面一个数比前一个数大 1，前面一个数比后面一个数小 1。

根据自然数的序数理论，我们可以定义自然数的加法和乘法（详见 1.2）。

在序数理论下，如何定义自然数的大小呢？

皮亚诺公理中的后继关系指明了相邻自然数的大小关系。根据自然数的加法，可以定义任意两个自然数的大小关系。如果 a，$b\in N$，存在 $k\in N$，使得 $a+k=b$,那么称 a 小于 b，记作 $a<b$，也称 b 大于 a，记作 $b>a$。

需要说明的是，皮亚诺公理的第（4）条是数学归纳法的基础。下面我们通过具体实例来看看它的价值，也顺便复习一下数学归纳法。

例 1　用数学归纳法证明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$（其中，$n\geqslant 1$）。

证明：当 $n=1$ 时，$1^2=1=\dfrac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}$，说明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

① 按照皮亚诺最初的记法，自然数从 1 开始，不包含 0。如果认为 0 是第一个自然数，需要把公理系统中的 1 换成 0。

假设当 $n=k$（$k\geqslant1$）时，$1^2+2^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$成立。

当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{(k+1)}{6}[6(k+1)]\\
&=\frac{(k+1)}{6}(2k^2+k+6k+6)\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}
$$

即，当 $n=k+1$ 时，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

综上所述，对于一切 $n\geqslant1$ 的自然数，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

1.1.4　计数与读数

1. 从记数到计数

所谓记数，就是把数记录下来。记数的发展也经历了由繁到简的漫长历史过程，经历了手指记数、石子记数、结绳记数等实物记数阶段，逐渐过渡到符号记数阶段。

但是，早期的记数方式使用一个符号表示一个数，要表示很多数，就需要很多符号，使用起来不太方便。后来，人们使用有限的符号，按照一定顺序加上排列规则来表述很多的数，这就是计数。

计数的方法很多，目前常用的是十进制计数法。“十进制计数法”包括“十进位”和“位置值”两条原则。

所谓“十进位”，就是满十进一，即相邻两个计数单位之间的进率为十，10 个一向十位进一，10 个十向百位进一……。也就是说，百位上的 1 相当于 10 个十位上的 1，十位上的 1 相当于 10 个个位上的 1。

所谓“位置值”，就是同一个数字在不同数位上表示的数值不同。比如，在“22”中，前一个 2 表示两个十，后一个 2 表示两个一。

例 2　有一个四位数，各位数字互不相同，将它的各位数字顺序颠倒过来，得到一个新的四位数，新数比原数大 7452，则原来的四位数是多少？

解：设原来的四位数是$\overline{abcd}$，依题意知$\overline{dcba}-\overline{abcd}=7452$。根据十进制计数法可得 $1000d+100c+10b+a=1000a+100b+10c+d+7452$。

整理得$999d+90c-90b-999a=7452$，可变形为$111(d-a)+10(c-b)=828$。

用 111 和 10 表示 828，只有 $111\times8-10\times6=828$，所以 $d-a=8$，$b-c=6$。

解得 $a=1$，$b=8$，$c=2$，$d=9$ 或 $a=1$，$b=6$，$c=0$，$d=9$。那么原来的四位数是 1829 或 1609。

2. 命数

命数，就是给数命名。按照十进制计数法，我国是按“四位一级”给自然数命名的，具体如下。

（1）自然数的前 10 个数给予单独的名称，即〇、一、二、三、四、五、六、七、八、九，对应的大写为零、壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖，对应的阿拉伯数字为 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9。

（2）按照“满十进一”的原则规定计数单位，10 个一叫作十，10 个十叫作百，10 个百叫作千，10 个千叫作万，10 个万叫作十万，10 个十万叫作百万，10 个百万叫作千万，10 个千万叫作亿，10 个亿叫作十亿，依次为百亿、千亿、兆……。十、百、千、万、亿的大写分别为拾、佰、仟、万、亿。其中，个、十、百、千为个级；万、十万、百万、千万为万级；之后依次为亿级……

（3）其他自然数的命名，由前 10 个数和计数单位组合而成。写数的时候，各计数单位对应写上数字。比如，一个自然数由三个千万两个十万九个千三个百四个一构成，写作“30209304”，读作“三千零二十万九千三百零四”。如果一个自然数由四个千亿三个亿三个百构成，写作“400300000300”，读作“四千零三亿零三百”。（见表 1.1－1）

表 1.1－1　数位分级与计数

级名			亿级				万级				个级			
计数单位	…	兆	千亿	百亿	十亿	亿	千万	百万	十万	万	千	百	十	个
							3	0	2	0	9	3	0	4
			4	0	0	3	0	0	0	0	0	3	0	0

3. 读数

按照我国传统的习惯，我们这样读数。

（1）不含有 0 的数，从高位到低位进行四位分级，然后从高位起，顺次读

出各级里的数和它们的级名。比如，8524 读作“八千五百二十四”，9647531 读作“九百六十四万七千五百三十一”。

（2）含有 0 的数，从高位到低位进行四位分级，然后从高位起，顺次读出各级里的数和它们的级名，每一级中间的零只读一次，每一级末尾的 0 不读。比如，3500 读作“三千五百”，3010 读作“三千零一十”，307001 读作“三十万七千零一”，5040030500 读作“五十亿四千零三万零五百”。

电子图书馆

[1] 史宁中，孔凡哲．“数学教师的素养”对话录 [J]．人民教育，2008（21）：43－49.

[2] 李邦河．数的概念的发展 [J]．数学通报，2009（8）：1－3，9.

[3] 张新春．皮亚诺公理与自然数的序数意义（一）[J]．湖南教育（C 版），2016（11）：36－37.

[4] 张新春．皮亚诺公理与自然数的序数意义（二）[J]．湖南教育（C 版），2016（12）：36－37.

1.2 运算

◉学习目标

- 理解自然数加法运算的含义、运算性质和运算规则。
- 理解自然数减法运算的含义、运算性质和运算规则。
- 理解自然数乘法运算的含义、运算性质和运算规则。
- 理解自然数除法运算的含义、运算性质和运算规则。
- 理解四则运算之间的关系和运算顺序。

1.2.1 加法

1. 定义

由于自然数有基数定义与序数定义，因此自然数的加法也有基数定义与序数定义。

基数定义 有限集合 A 的基数为自然数 a，有限集合 B 的基数为自然数 b，且 $A\cap B=\varnothing$，集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$ 的基数为 c，那么 c 叫作 a 与 b 的和，记作：$a+b=c$，读作：a 加 b 等于 c。其中，a 与 b 叫作加数，c 叫作和，符号

“+”叫作加号。

例如，自然数 3 代表集合 $A=\{a, b, c\}$ 的基数，自然数 4 代表集合 $B=\{d, e, f, g\}$ 的基数，$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 的基数为 7，所以 $3+4=7$。

因为 $A\cup\varnothing=A$，$\varnothing\cup A=A$，$\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$，所以有 $a+0=a$，$0+a=a$，$0+0=0$ 。

序数定义　如果某种运算满足：①设 $a\in\mathbf{N}$，则 $a+1=a^{+}$；②设 $a, b\in\mathbf{N}$，则 $a+b^{+}=(a+b)^{+}$，那么，这种运算就叫作加法。其中，a 与 b 叫作加数，$a+b$ 叫作它们的和。

例 1　计算 $3+8$。

解：先求 $3+1$，易知 $3+1=3^{+}=4$；

再求 $3+2$，$3+2=3+1^{+}=(3+1)^{+}=4^{+}=5$；

再求 $3+3$，$3+3=3+2^{+}=(3+2)^{+}=5^{+}=6$；

再求 $3+4$，$3+4=3+3^{+}=(3+3)^{+}=6^{+}=7$；

……

最后 $3+8$，$3+8=3+7^{+}=(3+7)^{+}=10^{+}=11$。

加法就是求两数和的运算，其本质是合并与求和。从上述定义和例子我们可以发现：加法的本质就是数数，$a+b$ 就是在 a 的后面连续数 b 个数，最后那个数就是 $a+b$ 的和。

教学链接｜加法的含义

在小学数学里，将加法定义为“把两个数（有时也指多个数）合并成一个数的数学运算”，其含义是合并和求和。加法的基本意义是聚合，并由聚合延伸出增加和比较。

（1）聚合，把两个部分合并在一起形成一个新的整体。例如，小明有 4 本书，小强有 5 本书，小明和小强一共有几本书？

（2）增加，一个事物的数量在原有基础上增加（或者伸长等）得到一个新的数量。比如，小树去年高 223 厘米，今年又长高了 28 厘米，今年小树有多高？

（3）比较，两个事物其中一个比另一个在数量上多（或者大等）。例如，小明有 4 本书，小强比小明多 2 本书，小强有几本书？

2. 运算性质

自然数的加法具有交换律、结合律等运算性质。

加法交换律　两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变，即 $a+b=b+a$。

加法结合律　三个数相加，先把前两个数相加，再加第三个数，或者先把后两

个数相加，再加第一个数，它们的结果不变，即 $(a+b)+c=a+(b+c)$。

我们可以这样直观地理解加法交换律和加法结合律。比如，图 1.2－1 中第一排的 5 个石子，从左向右数就是 $3+2=5$；而从右向左数就是 $2+3=5$，可见，最终结果与数数的顺序无关，因而得到 $3+2=2+3$。再如，第二排石子，从左往右数就是 $3+2+1=6$，从右往左数就是 $1+2+3=6$，可见 $(3+2)+1=3+(2+1)$，这就是加法结合律。

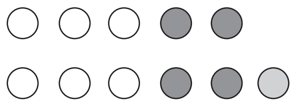


图 1.2－1

拓展阅读 和不变的性质

两个数相加，其中一个加数加上某个数，另一个加数减去相应的数，和仍然不变。用数学语言表达：若 $a+b=c$，那么 $(a\pm m)+(b\mp m)=c$。和不变的性质在中学的发展就是一次函数 $x+y=k$（其中 k 为常数）。

如果以“和不变的性质”作为基础，就可以证明加法交换律和加法结合律。比如，证明 $15+12=12+15$，根据和不变的性质，有 $15+12=(15-3)+(12+3)=12+15$。对于结合律，$(a+b)+c=a+(b+c)$，只需要把 $(a+b)$ 和 c 看作两个数，根据和不变的性质，有 $(a+b)+c=(a+b-b)+(b+c)=a+(b+c)$。

更为重要的是，我们在进行加法的简便运算时，常常使用和不变的性质先凑整再计算。比如，计算 $235+189=(235-11)+(189+11)=224+200=424$。再如，计算 $456+205=(456+5)+(205-5)=461+200=661$。

3. 运算规则

根据自然数加法的定义，加法就是数数。$a+b$ 就是在 a 的后面连续数 b 个数，最后数出的那个数就是 $a+b$ 的结果。

比如，$3+2$ 就是在 3 的基础上再数两个数 4，5，得到 $3+2=5$。当然也可以在 2 的基础上数三个数 3，4，5；还可以合并起来，先数 3 个再数 2 个，即 1，2，3，4，5，得到 $3+2=5$。

但实际计算时，每次这样数数比较麻烦，便分“表内加法”和“表外加法”，化繁为简进行计算。

（1）表内加法，将两个一位数相加的结果编成加法口诀表（如图 1.2－2 所示），在计算时直接使用这些结果。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1+1=2								
2	2+1=3	2+2=4							
3	3+1=4	3+2=5	3+3=6						
4	4+1=5	4+2=6	4+3=7	4+4=8					
5	5+1=6	5+2=7	5+3=8	5+4=9	5+5=10				
6	6+1=7	6+2=8	6+3=9	6+4=10	6+5=11	6+6=12			
7	7+1=8	7+2=9	7+3=10	7+4=11	7+5=12	7+6=13	7+7=14		
8	8+1=9	8+2=10	8+3=11	8+4=12	8+5=13	8+6=14	8+7=15	8+8=16	
9	9+1=10	9+2=11	9+3=12	9+4=13	9+5=14	9+6=15	9+7=16	9+8=17	9+9=18

图 1.2－2

（2）表外加法，多位数相加，先把它们写成不同计数单位和的形式，再将相同计数单位上的数相加。当相同数位上的数相加不超过 10 时，其结果是相同数位上的数分别相加的结果。当加数和被加数的同位数相加超过 10 时，要遵守“满十进一”的原则，结果向高一位进一，把余下的数作为同位数相加的结果。例如

$$
\begin{aligned}
&286+162\\
=&(2\text{百}+8\text{十}+6)+(1\text{百}+6\text{十}+2)\\
=&(2\text{百}+1\text{百})+(8\text{十}+6\text{十})+(6+2)\\
=&3\text{百}+14\text{十}+8\\
=&(3\text{百}+1\text{百})+4\text{十}+8\\
=&4\text{百}+4\text{十}+8\\
=&448。
\end{aligned}
$$

这个过程，用竖式表示为

$$
\begin{array}{rccc}
 & 2 & 8 & 6\\
+ & 1_1 & 6 & 2\\
\hline
 & 4 & 4 & 8
\end{array}
$$

1.2.2　减法

1. 定义

减法是加法的逆运算。已知两个数 c 和 b，求一个数 a，使得 a 与 b 的和等于 c，这种运算叫作减法，记作：$c-b=a$，读作：c 减 b 等于 a。其中，c 叫作被减数，b 叫作减数，a 叫作 c 与 b 的差，符号“－”叫作减号。

注意，有观点认为，减法算式是加法算式的另一种表达形式。比如，有人认为 $5+4=9$、$4+5=9$、$9-4=5$ 和 $9-5=4$ 这四个算式只是写法不同，含义并不存在很大区别。

需要说明的是，在自然数范围内，减法不一定总可以进行，也就是差不一定存在。比如，在自然数范围内，$3-5$ 就不能进行。

但是，如果差存在，那么差一定唯一。也就是，如果 $a-b=x$，且 $a-b=y$，那么 $x=y$。下面证明这个结论。

如果 $x\neq y$，那么必有 $x>y$ 或者 $x<y$ 之一成立。不妨设 $x>y$，那么必然存在 $\Delta>0$，使得 $x=y+\Delta$。

由减法的定义得，$a=b+x$，且 $a=b+y$，由 $a=b+x=b+(y+\Delta)=b+y+\Delta=a+\Delta$。根据自然数的含义，$a=a+\Delta$ 是不可能成立的。

教学链接 | 减法的含义

在小学数学中，减法是从一个数量中减去另一个数量的运算，含义是相减和求差。减法的基本意义是分离，并由分离延伸出减少和比较。

（1）分离，从某个群体中分离出一部分，求剩下的部分。比如，小强有 6 枚邮票，他寄信用去了 4 枚，还剩下几枚？

（2）减少，表示某事物在数量上减少（或者缩短、降低等）。比如，昨天最高气温 15℃，今天降低了 3℃。今天最高气温多少度？

（3）比较，比较有两种情形：一种是两者已知，求比较结果是多少。比如，小强有 9 颗玻璃珠，小明有 5 颗玻璃珠，小强比小明多几颗玻璃珠？另一种是，已知其中之一和比较结果，求另一个量。比如，小强有 9 颗玻璃珠，小明比他少 4 颗，小明有几颗玻璃珠？

2. 运算性质

减法具有一些基本性质，又称为去括号法则。

性质 1　一个数减去两个数的和，等于从这个数中依次减去和里的每一个加数，即 $a-(b+c)=a-b-c$。

性质 2　一个数减去两个数的差，等于先减去差里的被减数，再加上差里的减数，即 $a-(b-c)=a-b+c$。

拓展阅读　差不变的性质

被减数和减数同时加上或减去一个数，其差不变，即如果 $a-b=c$，那么 $(a\pm m)-(b\pm m)=c$。差不变的性质在中学的发展就是一次函数 $x-y=k$（其中 k 为常数）。

如果以“差不变的性质”作为基础，就可以推导“去括号”法则。比如，要计算 $a-(b-c)$，可以使被减数和减数同时加上 c，得到 $a+c-(b-c+c)=a+c-b=a-b+c$。类似的，读者可以推导 $a+(b-c)=a+b-c$。

此外，我们在进行减法的简便运算时，常常使用差不变的性质先凑整再计算。比如，计算 $235-189=(235+11)-(189+11)=246-200=46$。

3. 运算规则

计算减法最初级的方法是“倒着数数”。比如，要计算 $8-3$，就向 8 前面数 3 个数，依次为 7，6，5，结果就是 5，因此 $8-3=5$。但在数学上，我们是根据表内加法来计算表内减法的。

（1）表内减法。对于数比较小的减法，可以逆向运用加法口诀表的结果进行计算。比如，要计算 $15-8$，可以根据口诀“$8+7=15$”，得出 $15-8=7$。

（2）表外减法。两个多位数相减，先把它们写成不同计数单位和的形式，再将相同计数单位上的数相减。当相同数位够减时，其结果是相同数位上的数分别相减的结果。当相同数位不够减时，要遵守“借一当十”的原则，高一位借一凑成大于等于十的数，就可以进行计算了。例如

$$
\begin{aligned}
&252-128\\
=&(2\text{ 百}+5\text{ 十}+2)-(1\text{ 百}+2\text{ 十}+8)\\
=&(2\text{ 百}-1\text{ 百})+(5\text{ 十}-2\text{ 十})+(2-8)\\
=&1\text{ 百}+3\text{ 十}+(2-8)\\
=&1\text{ 百}+2\text{ 十}+(12-8)\\
=&1\text{ 百}+2\text{ 十}+4\\
=&124。
\end{aligned}
$$

这个过程，用竖式表示为

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 4 & \\
 & 2 & \cancel{5} & {}^{1}2 \\
- & 1 & 2 & 8 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4
\end{array}
\quad \text{简写为} \quad
\begin{array}{cccc}
 & 2 & 5^{1} & 2 \\
- & 1 & 2 & 8 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4
\end{array}
$$

电子图书馆

[1] 张新春．皮亚诺公理体系下的自然数运算（一）[J]．湖南教育（C版），2017（1）：36－37.

[2] 张新春．皮亚诺公理体系下的自然数运算（二）[J]．湖南教育（C版），2017（2）：36－37.

[3] 张新春．基数意义下自然数的运算（一）[J]．湖南教育（C版），2016（9）：36－37.

[4] 张新春．基数意义下自然数的运算（二）[J]．湖南教育（C版），2016（10）：36－37.

[5] 王海娇，郜舒竹．加、减竖式如何教[J]．教学月刊小学版（数学），2012（3）：18－19.

[6] 郑莉．自然数概念教学中学习材料的选择与使用[J]．教学月刊小学版（数学），2017（6）：36－39.

1.2.3 乘法

1. 定义

自然数的乘法有基数定义、序数定义与加法定义三种形式。

基数定义 如果 $\|A\|=a$，$\|B\|=b$，$\|A\|\times\|B\|=c$，那么定义 $a\times b=c$。其中，a 和 b 叫作因数，c 叫作积，符号“×”叫作乘号。

例如，集合 $A=\{a, b, c\}$ 与集合 $B=\{x, y\}$ 构成的笛卡儿集 $A\times B=\{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$。注意到集合 A，B，$A\times B$ 的基数分别为 3，2，6，因此，定义 $3\times 2=6$。读作：3 乘 2 等于 6。

序数定义 满足以下规则的运算：①设 $a\in\mathbf{N}$，则 $a\times 1=a$；②设 a，$b\in\mathbf{N}$，则 $a\times b^{+}=a\times b+a$，叫作乘法。其中，$a$ 叫作被乘数，b 叫作乘数，$a\times b$（或记作 $a\cdot b$，ab）叫作它们的积。

例 2 计算 3×8。

解：先求 3×1，易知 $3\times 1=3$；

再求 3×2，$3\times 2=3\times 1^{+}=3\times 1+3=3+3=6$；

再求 3×3，$3\times 3=3\times 2^{+}=3\times 2+3=6+3=9$；

……

最后 3×8，$3\times 8=3\times 7^{+}=3\times 7+3=21+3=24$。

加法定义 求 b 个相同加数 a 自身连加的运算，叫作 a 与 b 的积。求两个数

积的运算叫作乘法。一般地，如果 $c=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b个a相加}$，记作 $a\times b=c$，读作“a 乘 b 等于 c”①。其中，a 叫作被乘数，b 叫作乘数，c 叫作积，符号“×”叫作乘号。乘号“×”有时写作“·”，在不引起混淆的情况下，可以省略不写。

从上述定义和例子可以发现：乘法的本质就是连加，$a\times b$ 就是将被乘数 a 连加 b 次，最后的结果就是 $a\times b$ 的积。

教学链接｜乘法的含义

在小学数学中，为了便于学生理解乘法的含义，使用了很多乘法的现实模型。归纳一下，主要有以下四种类型。

（1）相同加数连加。比如，每只兔子有 2 只耳朵，4 只兔子一共有多少只耳朵？

（2）倍数。比如，池塘里面有 3 只鹅，鸭子的数量是鹅的 4 倍，那么池塘里有多少只鸭子？

（3）矩形面积。如果长方形的长为 8 厘米，宽为 6 厘米，那么长方形的面积是多少平方厘米？

（4）物理模型，如路程 = 速度 × 时间、总价 = 单价 × 数量等。例如，小明步行每分钟大约走 72 米，他绕操场一周大约走 4 分钟，那么操场一周大约有多少米？

2. 运算性质

自然数的乘法具有交换律、结合律、乘法对加减法的分配律（简称分配律）等运算性质。

交换律　两个数相乘，交换乘数的位置，乘积不变，即 $ab=ba$。

结合律　三个数相乘，先把前两个数相乘，再与第三个数相乘，或者先把后两个数相乘，再与第一个数相乘，它们的积不变，即（ab）$c=a$（bc）。

证明：$a(bc)$

$=a\ (\underbrace{b+b+\cdots+b}_{c个b相加})$

$=\underbrace{ab+ab+\cdots+ab}_{c个ab相加}$（注：这一步用到乘法分配律）

$=(ab)c$。

分配律　两个数的和与一个数相乘的积，等于和里的每一个加数与这个数

① 有时补充规定：$a\times 1=a$，$a\times 0=0$，$0\times 0=0$。

相乘，再把所得的积加起来，即 $(a+b)c=ac+bc$。

证明：$(a+b)c$

$$=\underbrace{(a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b)}_{c\text{个}(a+b)\text{相加}}$$

$$=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{c\text{个}a\text{相加}}+\underbrace{b+b+\cdots+b}_{c\text{个}b\text{相加}}$$

$$=ac+bc\text{。}$$

注意，分配律的另一形式是，两个数的差与一个数相乘的积，等于被减数与减数分别与这个数相乘，再把所得积相减，即 $(a-b)c=ac-bc$。因此，乘法分配律的标准形式是$(a\pm b)\times c=a\times c\pm b\times c$。因为具有交换律，所以乘法分配律有时候可以写成 $c\times(a\pm b)=c\times a\pm c\times b$。

拓展阅读 积不变的性质

两个数相乘，其中一个因数扩大某个倍数，另一个因数缩小到相同倍数分之一，乘积不变，即如果 $a\times b=c$，那么 $(a\times m)\times(b\div m)=c$。

如果以“积不变的性质”为基础，就可以证明乘法交换律和结合律（请读者自行完成）。此外，我们在进行乘法的简便运算时，常常使用积不变的性质先凑整再计算。

比如，计算 125×32，因为 $125\times8=1000$，故需将 125 扩大 8 倍变为 1000，相应的 32 应该缩小到它的$\frac{1}{8}$，于是 $125\times32=(125\times8)\times(32\div8)=1000\times4=4000$。

值得注意的是，今后学习的“反比例”“反比例函数”“小数乘法”的基本原理，就是乘法“积不变的性质”。

3. 运算规则

乘法的本质就是相同加数自身连加，$a\times b$ 就是将被乘数 a 连加 b 次，最后的结果就是 $a\times b$ 的积。但在实际计算时，常分为“表内乘法”与“表外乘法”进行计算。

（1）表内乘法。关于乘法的运算，当数字比较小时，可以借助加法来计算。比如，$4\times6=4+4+4+4+4+4=24$，用得多了，便成为口诀“四六二十四”。所有一位数乘一位数的结果，汇编成乘法口诀，就是我们通常说的“九九乘法表”，如图 1.2－3 所示。

乘 法 口 诀

一一得一								
1×1=1								
一二得二	**二二得四**							
1×2=2	2×2=4							
一三得三	**二三得六**	**三三得九**						
1×3=3	2×3=6	3×3=9						
一四得四	**二四得八**	**三四十二**	**四四十六**					
1×4=4	2×4=8	3×4=12	4×4=16					
一五得五	**二五一十**	**三五十五**	**四五二十**	**五五二十五**				
1×5=5	2×5=10	3×5=15	4×5=20	5×5=25				
一六得六	**二六十二**	**三六十八**	**四六二十四**	**五六三十**	**六六三十六**			
1×6=6	2×6=12	3×6=18	4×6=24	5×6=30	6×6=36			
一七得七	**二七十四**	**三七二十一**	**四七二十八**	**五七三十五**	**六七四十二**	**七七四十九**		
1×7=7	2×7=14	3×7=21	4×7=28	5×7=35	6×7=42	7×7=49		
一八得八	**二八十六**	**三八二十四**	**四八三十二**	**五八四十**	**六八四十八**	**七八五十六**	**八八六十四**	
1×8=8	2×8=16	3×8=24	4×8=32	5×8=40	6×8=48	7×8=56	8×8=64	
一九得九	**二九十八**	**三九二十七**	**四九三十六**	**五九四十五**	**六九五十四**	**七九六十三**	**八九七十二**	**九九八十一**
1×9=9	2×9=18	3×9=27	4×9=36	5×9=45	6×9=54	7×9=63	8×9=72	9×9=81

图 1. 2 –3

（2）表外乘法。

①多位数乘一位数。将多位数用十进制计数法表示，转化为若干个数的和乘一位数，再根据乘法分配律计算。比如

$$
\begin{aligned}
&358\times6\\
=&(3\times100+5\times10+8)\times6\\
=&3\times6\times100+5\times6\times10+8\times6\\
=&18\times100+30\times10+48\\
=&1800+300+48\\
=&2148。
\end{aligned}
$$

②多位数乘整十（百、千）的数 。将整十（百、千）的数用十进制计数法表示，转化为多位数乘一位数，再乘十（百、千等）。比如

$$
\begin{aligned}
&126\times30\\
=&126\times3\times10\\
=&378\times10\\
=&3780。
\end{aligned}
$$

③多位数乘多位数。将第二个乘数用十进制和表示，再利用乘法分配律转化为前两类运算来计算。比如

$$
\begin{aligned}
&258\times129\\
=&258\times(1\times10^2+2\times10+9)\\
=&258\times1\times10^2+258\times2\times10+258\times9\\
=&25800+5160+2322\\
=&33282。
\end{aligned}
$$

这个过程，用竖式表示为

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 2 & 5 & 8\\
 & & \times & 1 & 2 & 9\\
\hline
 & & 2 & 3 & 2 & 2\\
 & & 5 & 1 & 6 & 0\\
+ & 2 & 5 & 8 & 0 & 0\\
\hline
 & 3 & 3 & 2 & 8 & 2
\end{array}
\quad \text{简写为} \quad
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 5 & 8\\
 & \times & 1 & 2 & 9\\
\hline
 & 2 & 3 & 2 & 2\\
 & 5 & 1 & 6 & \\
2 & 5 & 8 & & \\
\hline
3 & 3 & 2 & 8 & 2
\end{array}
$$

电子图书馆

[1] 曾小平，韩龙淑．让学生经历知识的形成过程：以“乘法分配律”的教学为例［J］．教学月刊小学版（数学），2012（3）：23－25.

[2] 曾小平，韩龙淑．多位数乘法的算法、算理与教学［J］．小学教学（数学版），2011（10）：47－49.

[3] 郜舒竹．为何“探究不出来”：兼谈教学难点的分析方法［J］．人民教育，2009（8）：41.

1.2.4 除法

1. 定义

除法是乘法的逆运算，一般借助乘法来定义除法。

已知两个数 a 和 b，求一个数 q，使得 $b\times q=a$，这种运算叫作除法。记作：$a\div b=q$。读作：a 除以 b 等于 q，也可以读作：b 除 a 等于 q。其中，a 叫作被除数，b 叫作除数，q 叫作 a 除以 b 的商，符号“÷”叫作除号。

除法可以表示“平均分”，$a\div b=q$ 就表示“将 a 个物体平均分成 b 份，每一份为 q 个”。如果我们把乘法定义为“连加”，那么除法可以理解为“连减”，也就是“包含”。换句话说，$a\div b=q$ 还可以理解为 $a-\underbrace{b-b-\cdots-b}_{q\text{个}b}=0$。

需要说明的是，在自然数范围内，除法不一定总可以进行，也就是商不一定存在。比如，在自然数范围内，$7\div5$ 就不能进行。

但是，如果商存在，那么商一定唯一。也就是，如果 $a\div b=x$，且 $a\div b=y$，那么 $x=y$。(请读者自行证明)

注意，有观点认为，除法算式是乘法算式的另一种表达形式。比如，认为 $5\times4=20$、$4\times5=20$、$20\div4=5$ 和 $20\div5=4$ 这四个算式只是写法不同，含义并不存在很大区别。也可以说，这四个算式都可以由乘法口诀“四五二十”衍生而来。

教学链接｜除法的含义

在小学数学中，为了便于学生理解除法的含义，使用了很多除法的现实模型。归纳一下，主要有以下四种类型。

(1) 等分除。例如，把18本书平均分给3个小朋友，每人分得几本书？用除法算式“$18\div3=6$”表示，其中结果6表示每人分得6本书。

(2) 包含除。例如，有12本书，4本书捆成一捆，可以捆成几捆？用除法算式“$12\div4=3$”表示，其中结果3表示可以捆成三捆。

(3) 倍。求一个数量是另一个数量的几倍。例如，游乐园里有28个小朋友，4名教师，那么小朋友的人数是教师人数的几倍？

(4) 乘法逆运算。已知教室的长是8米，面积是48平方米，那么教室的宽是多少米？这就需要根据“长方形面积＝长×宽”，逆用该公式得到“宽＝长方形面积÷长”，列出算式“$48\div8=6$”来进行求解。

物理模型，现实生活中规定用除法进行计算的现实模型。比如，“浓度＝溶质÷溶液×100%”“利率＝利息÷本金”等。

其实，一个算式就是一个故事，借助典型的故事，学生能更好地理解抽象的算式，还能加深对抽象概念的多角度理解。

2. 运算性质

自然数的除法具有去括号性质、除法对加减法的分配律（简称分配律）。

性质1　一个数除以两个数的积，等于这个数依次除以积里的每一个乘数，即 $a\div(b\times c)=a\div b\div c$。

性质2　一个数除以两个数的商，等于先除以商里的被除数，再乘商里的除数，即 $a\div(b\div c)=a\div b\times c$。

分配律　两个数的和（或差）除以同一个数，等于和（或差）里的每个数除以这个数，再把所得的商相加（或相减），即 $(a\pm b)\div c=a\div c\pm b\div c$。

注意，因为除法没有交换律，所以除法分配律仅有一种形式，即 $(a\pm b)\div c=a\div c\pm b\div c$。

拓展阅读 商不变的性质

两个数相除，被除数和除数同时扩大或者缩小相同的倍数，商不变。也就是说，若$a \div b = c$，那么 $(a \times m) \div (b \times m) = c$。

如果以“商不变的性质”作为基础，就可以推导去括号法则。比如，对于$a \div (b \div c) = (a \times c) \div (b \div c \times c) = a \times c \div b = a \div b \times c$。

同时，今后学习的“分数的基本性质”“分数除法计算”“正比例”“正比例函数”“小数除法计算”的基本原理的本质都是除法中“商不变的性质”。比如，计算分数除法 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \left(\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}\right) \div \left(\frac{d}{c} \times \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}\right) \div 1 = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}$。

此外，我们在进行除法的简便运算时，常常使用“商不变的性质”先凑整再计算。例如，$135 \div 25 = (135 \times 4) \div (25 \times 4) = 540 \div 100 = 5.4$。

3. 运算规则

自然数的除法分为“表内除法”和“表外除法”两类进行计算。

（1）表内除法，根据乘法口诀表，逆用口诀来计算。比如，要计算 $8 \div 2$，可以根据乘法口诀“二四得八”，即$2 \times 4 = 8$，算出$8 \div 2 = 4$。

（2）表外除法，计算时把被除数分解为多个数的和再除以除数，然后根据除法分配律进行计算。如果某一位不能整除，则自动向下一位转移，除到哪位就商到哪位上。比如

$4807 \div 23$

$= (4\text{千} + 8\text{百} + 7) \div 23$

$= (46\text{百} + 207) \div 23$

$= 2\text{百} + 9$

$= 209$。

这个过程，用竖式表示为

$$\begin{array}{rllll}
 & & 2 & 0 & 9\\ \cline{2-5}
23) & 4 & 8 & 0 & 7\\
 & 4 & 6 & & \\ \cline{2-5}
 & & 2 & 0 & \\
 & & & 0 & \\ \cline{2-5}
 & & 2 & 0 & 7\\
 & & 2 & 0 & 7\\ \cline{2-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

简写为

$$\begin{array}{rllll}
 & & 2 & 0 & 9\\ \cline{2-5}
23) & 4 & 8 & 0 & 7\\
 & 4 & 6 & & \\ \cline{2-5}
 & & 2 & 0 & 7\\
 & & 2 & 0 & 7\\ \cline{2-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

拓展阅读 除法竖式的发展

17 世纪，欧洲出现了竖式除法，经过逐渐演变和简化，成了我们现在使用的方法。以 $732\div6$ 为例，大致经过了以下几个阶段①。

$$\begin{array}{rrrr}
 & 1 & 2 & 2 \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 2 \\
 & & 6 & 0 \\
 & & 5 & 0 \\ \cline{2-4}
6\big) & 7 & 3 & 2 \\
 & -3 & 0 & 0 \\ \cline{2-4}
 & 4 & 3 & 2 \\
 & -3 & 6 & 0 \\ \cline{2-4}
 & & 7 & 2 \\
 & & -7 & 2 \\ \cline{2-4}
 & & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & 1 & 2 & 2 \\ \cline{2-4}
 & & & 2 \\
 & & 2 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{2-4}
6\big) & 7 & 3 & 2 \\
 & -6 & 0 & 0 \\ \cline{2-4}
 & 1 & 3 & 2 \\
 & -1 & 2 & 0 \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 2 \\
 & & -1 & 2 \\ \cline{2-4}
 & & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & 1 & 2 & 2 \\ \cline{2-4}
6\big) & 7 & 3 & 2 \\
 & -6 & 0 & 0 \\ \cline{2-4}
 & 1 & 3 & 2 \\
 & -1 & 2 & 0 \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 2 \\
 & & -1 & 2 \\ \cline{2-4}
 & & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & 1 & 2 & 2 \\ \cline{2-4}
6\big) & 7 & 3 & 2 \\
 & -6 & & \\ \cline{2-4}
 & 1 & 3 & \\
 & -1 & 2 & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 2 \\
 & & -1 & 2 \\ \cline{2-4}
 & & & 0
\end{array}$$

竖式计算除法是一种程序性操作，它的计算规则是：从被除数的最高位起，取出和除数位数相同的数（如果取出的数小于除数，则要取出比除数多一位的数），用除数去除它，得到商的最高位数和余数（余数可能为零）；把余数化为下一级的单位，加上被除数上这一位原来的数，再用除数去除它（除数小于该数时商为0），得到商和余数；这样继续下去，直到被除数上的数字全部用完为止，得到最后的商和余数。

电子图书馆

［1］郜舒竹．回眸历史看竖式［J］．教学月刊小学版（数学），2013（6）：17.

［2］曾小平，韩龙淑．除法竖式的发展与教学［J］．小学教学（数学版），2011（11）：46.

4. 带余除法

在自然数范围内做除法运算时，有时候得不到自然数商，但可以找到最大商。比如，$62\div9$，就没办法找到一个自然数乘 9 等于 62。但是能够找到一个自然数 6，使得 $9\times6=54<62$，而 $9\times(6+1)=63>62$。从而，可以找到 $62\div9$ 的最大商为 6，并且 $62-9\times6=8<9$。

---

① EUGENE D, MERLYN J. Elementary school mathematics and how to teach it［M］. New York：CBS College Publishing，1982：81－82.

定义　已知两个自然数 a 和 b（$b \neq 0$），要求两个自然数 q 和 r，使得 $a = b \times q + r$，并且 $0 < r < b$，一般记作 $a \div b = q$（余 r）或者 $a \div b = q \cdots\cdots r$；读作：$a$ 除以 b 等于 q 余 r。

这样的除法运算叫作带余除法。其中，a 叫作被除数，b 叫作除数，q 叫作不完全商（简称商），r 叫作余数。

如果允许 $r = 0$，那么此时的除法就是我们前面讲的除法（通常称为整除）。

对于带余除法的基本结论：商和余数存在并且唯一。（详见 2.2）

需要说明的是，$a \div b = q \cdots\cdots r$ 的真实含义是 a 除以 b 商 q 余 r，其中的等号是简单记号，并不表示等号两端真正相等。如果把等号两边看作相等，就会导致数学错误。比如，由 $33 \div 4 = 8 \cdots\cdots 1$ 和 $57 \div 7 = 8 \cdots\cdots 1$ 得到 $33 \div 4 = 57 \div 7$ 的荒谬结论。

电子图书馆

[1] 戎松魁．理解“有余数除法定义”是找到“到底错在哪一步”的关键 [J]．中小学数学（小学版），2012（7/8）：62.

[2] 蔡金法．小学数学教师的专业素养：以如何上好一堂课的视角来探讨 [J]．小学教学（数学版），2014（7）：10－14.

1.2.5　混合运算

在一个算式里，如果有两种或者两种以上的运算，通常称为混合运算。数学上，通常把含有加、减、乘、除的混合运算称为四则混合运算。

在四则混合运算中，将加法和减法叫作一级运算，乘法和除法叫作二级运算。数学中规定，混合运算的具体运算顺序如下。

（1）在没有括号的算式中，如果为同一级运算，则从左向右依次进行运算；如果为非同一级混合运算，则先算乘与除，后算加与减。

（2）在有括号的算式中，先算括号里面的算式，再算括号外面的算式；如果有多种括号，先算小括号里面的算式，再算中括号里面的算式，最后算大括号里面的算式。

从上述两条运算规则可以看出：括号是用来改变运算顺序的。通常的括号有小括号，又叫圆括号，记作“（　）”；中括号，又叫方括号，记作“[　]”；大括号，又叫花括号，记作“{　}”。

教学链接 | **先算乘与除，后算加与减**

在小学课堂上，小学生常常会问：“为什么要先算乘与除，后算加与减?”其实，这是一条数学规定，其合理性在于：①如果依次运算，$3+2\times4$ 的结果就会和 $(3+2)\times4$ 相同，违背了追求简洁的原则；②如果把乘还原为加，统一为同一种运算，应该是 $3+2+2+2+2=11$，与先算乘除后算加减所得结果一致。根据以上原因，我们规定：“在四则混合运算中，先算乘与除，后算加与减。”

生活中可能会遇到需要精确计算时间的情况，如甲施工队每天可修建 200 米路，乙施工队每天可修建 120 米路，那么甲、乙两队分别修建 600 米长的路时，甲比乙少用多长时间？这一问题的解决过程是分别算出甲、乙所花的时间，再进行多多少或少多少的计算，即 $600\div200=3$（天），$600\div120=5$（天），$5-3=2$（天）。列综合算式：$600\div120-600\div200=2$（天），脱式计算的过程依然要符合实际的思维过程，即先算除法，后算减法。

电子图书馆

张清清，曾小平．加减和乘除的区别 [J]．小学教学（数学版），2018（10）：67－68.

1.3　整数

◉学习目标

- 了解负整数产生的原因，理解负整数的数学含义。
- 理解整数四则运算的法则，正确进行整数四则运算。
- 了解 0 这个特殊整数在数学上的意义。

1.3.1　负整数的产生

人类创造了自然数，定义了四则运算，解决了不少问题。但仅仅有自然数是不够的，还要引进负整数，才能解决更多问题。引入负整数，一方面来源于实际生活计量（度量）更为方便的需要，另一方面来源于运算的需要。

1. 实际需要

实际生活中常常需要表达具有相反意义的量。比如，某年某月某日，北京

气温零下5℃，广州气温零上12℃；某人某天从银行提取2000元，某日又往同张银行卡上存入3000元；某仓库某天运进货物80吨，运出75吨；等等。

为了区分这些具有相反意义的量，有时把其中一个量规定为正的，另一个与它相反意义的量规定为负的。正的量用自然数加上正号“+”表示，正号“+”读作“正”，有时也可以省略。负的量用自然数加上负号“-”表示，负号“-”读作“负”。例如，广州气温零上12℃，记作+12℃；北京气温零下5℃，记作-5℃。

像+1，+2，+3等，带有正号的数，叫作正整数。像-1，-2，-3等，带有负号的数，叫作负整数。零既不是正整数，也不是负整数。

2. 运算需要

在自然数范围内，减法并不总是能畅通无阻地进行，小数减大数就没办法计算。也就是说，自然数集对减法运算不封闭，即在自然数集 $\mathbf{N}$ 中，当 $a \geqslant b$ 时，$a-b \in \mathbf{N}$；当 $a<b$ 时，$a-b \notin \mathbf{N}$。

为了保证减法的实现，数学上需要引进负数①。对任意非零的自然数 n，引进一个数 $-n$ 与之对应，满足 $n+(-n)=(-n)+n=0$，这里的 $-n$（$n \in \mathbf{N}$，$n \neq 0$）叫作负整数。同时，n 和 $-n$ 互为相反数。

1.3.2 整数的定义

数学上，把正整数、零和负整数统称为整数。整数可以看作自然数集中加入负整数后，得到的一个更大的数集合。在整数集合中，任何两个数都可以进行减法运算。

在数轴上，表示数 a 的点到原点的距离叫作数 a 的绝对值，绝对值用“$|a|$”来表示。

例如，$|5|$指在数轴上表示数5的点与原点的距离，这个距离是5，所以5的绝对值是5。同样，$|-5|$指在数轴上表示数-5的点与原点的距离，这个距离是5，所以-5的绝对值也是5。

容易知道：正整数的绝对值是它本身，负整数的绝对值是它的相反数，0的绝对值还是0，即

---

① 柯朗，罗宾. 什么是数学：对思想和方法的基本研究［M］. 左平，张饴慈，译. 上海：复旦大学出版社，2005：67.

$$|a|=\begin{cases}a\ (a>0),\\0\ (a=0),\\-a\ (a<0)。\end{cases}$$

1.3.3　整数的运算

1. 加减法

整数范围内的加减法可转化为自然数范围内的加减法进行计算。比如，$8+(-13)=8+(0-13)=8+0-13=-5$，$9-(-4)=9-(0-4)=9-0+4=13$。

可以验证，在整数范围内，加减法可以畅通无阻地进行，加法交换律和结合律仍然成立。

但是，每次都这样计算比较麻烦，所以减去一个数可以转化为加上它的相反数。这样，整数加减运算就可归结为加法运算。

注意，在整数范围内，如何比较数的大小呢？

数学上规定：如果 $a-b>0$，则 $a>b$；如果 $a-b=0$，则 $a=b$；如果 $a-b<0$，则 $a<b$。比如，因为 $(-8)-(-5)=-3<0$，所以 $-8<-5$。

2. 乘除法

要在整数范围内定义乘法运算，我们应基于两点假设。首先，我们希望自然数范围内的运算律（交换律、结合律和分配律）在整数范围内仍然适用。其次，自然数范围内的常见运算事实在整数范围内仍然适用，如零与任何数相乘的积为零，1 与任何数相乘的积为这个数本身。

为了论述方便，我们用 a，b 表示任意两个正整数，而用 $-a$，$-b$ 表示任意两个负整数，对任意两个非零整数相乘的四种情况分别介绍如下。

（1）正整数×正整数，仍然按照非负整数的方式进行，即 $a\times b=ab$。

（2）正整数×负整数，$a\times(-b)=a\times(0-b)=a\times0-a\times b=0-ab=-(ab-0)=-ab$（其中第二个等号成立的依据是乘法分配律，第四个等号成立的依据是负整数的定义）。

（3）负整数×正整数，$(-a)\times b=(0-a)\times b=0\times b-a\times b=0-ab=-(ab-0)=-ab$。

（4）负整数×负整数，$(-a)\times(-b)=(0-a)\times(-b)=0\times(-b)-a\times(-b)=0-a\times(-b)=-a\times(-b)=-(-ab)=-(0-ab)=ab-0=ab$（其中，第五个等号成立是依据（2）中的结果，第六个和第七个等号成立的依据是负整数的定义。

如何计算整数除法呢？可将整数除法看作乘法的逆运算，借助整数乘法来计算整数除法。

例如，要计算 $18\div(-3)$，就想 $(\quad)\times(-3)=18$，因为 $(-6)\times(-3)=18$，所以 $18\div(-3)=-6$。再如，要计算 $(-56)\div(-7)$，就想 $(\quad)\times(-7)=-56$，因为 $8\times(-7)=-56$，所以 $(-56)\div(-7)=8$。

为了便于计算，将整数乘除法总结为：两个整数相乘除，同号为正，异号为负，并把绝对值相乘除；零乘任何整数，积为零。

教学链接 | 认识负数

在小学范围内，我们怎样理解负数的产生和性质呢？在非负数范围内，我们没办法计算 $5-8$，但可以尽量将它化简，即根据差不变的性质，得到 $5-8=0-3$，把“$0-3$”看作一个新的数，简单记作“-3”。

而原来在非负数范围内可以进行的减法还按原来的方法进行，如 $8-5=3-0=0+3=3$。更一般的，数学上规定形如 $3\ (=0+3)$、$5\ (=0+5)$ 这样的数叫作正数，形如 $-3\ (=0-3)$、$-5\ (=0-5)$ 这样的数叫作负数，把正整数、零和负整数统称为整数。

在小学阶段，如果注意到 $-8=0-8$、$-5=0-5$，因为 $0-8<0-5$（被减数相同，减数越大，差越小），也可以得到 $-8<-5$。这对学生来讲是比较容易接受的。

电子图书馆

[1] 曾小平，石冶郝．负数的本质与有理数乘法法则：从数学的角度解析“负负得正”[J]．教学月刊（中学版），2012（1）：9－11.

[2] 柳笛．数学家对负数大小关系认识的历史片段 [J]．湖南教育（数学教师），2008（8）：43－44.

[3] 曾小平，涂荣豹．基于数学规定的“有理数乘法”教学：从数学的角度突破“负负得正”[J]．中学数学教学参考，2009（1）：48－51.

1.3.4 特殊整数 0

自然数 0 原来不属于自然数。但是 1993 年，《中华人民共和国国家标准》规定：0 是自然数，表示一个也没有。

把 0 纳入自然数有很多好处：0 与空集基数相对；0 是加法的不变元，即任何数加 0 还等于其本身；有了 0 才有相反数，为负数创造条件；减法更广泛，出现 $2-2$，$4-4$；0 在 1 之前，高考填报零志愿（提前录取）；出现 0，产生了负整数，自然数扩大到整数。可见，0 的实际意义还是比较丰富的。

自然数扩充到整数范围后，0 的意义也更加丰富：它不再是最小的数了，而是成为正负整数的分界点，正整数比它大，负整数比它小。同时，0 成为正整数和负整数这对矛盾统一体彼此转化和过渡的桥梁。正因为如此，我们才可以选择 0 作为标准（中间值），用正整数和负整数来刻画一对具有相反意义的量。比如，刻画温度、标记存取钱、表达结余与亏损等。

但是，将 0 看作自然数也引发了一些问题，比如，0 作除数会怎样？① 0 是质数还是合数？最小的一位数是几？0 的约数是多少？0 是任何一个自然数的倍数吗？这些问题，在数学界曾经引起较大争论，但至今尚无定论。鉴于此，友情提醒：0 只是一个自然数，不要过分追究它的意义和特性，否则在小学阶段很难向学生解释清楚，也会引发一连串的问题，反而干扰学生的正常学习！

拓展阅读 0 的起源

数字 0 的出现，是数学史上的重大创造。0 一直被认为是阿拉伯数字，但它的起源在印度和中国。

公元 3 世纪到 6 世纪，古印度产生了十进制计数法，规定了十个数字符号。起初，古印度人用“·”表示空位，后来演变成“0”。在古印度，0 的梵文名称为 sunya，汉语译为“舜若”，意为“空”。一切皆空，这是 0 的特性，反映了古印度佛教认识万物的痕迹。

古代中国将算筹摆成不同的形状来记录数字。1－9 都用算筹表示，0 用空位表示，后来用“□”，为了便于书写，演化成圆圈“○”。用“○”代表零最早见于 1180 年的《大明历》，到了 1247 年，南宋时期的数学家秦九韶就大量使用“○”。

---

① 为何规定 0 不能作除数呢？任何数乘零都不等于一个非零数 a，所以 $a \div 0$ 没有意义。对于任何可变的自然数 q，均有 $q \times 0 = 0$，由乘除法的关系得，$0 \div 0 = q$，则结果不确定，不利于进行数学运算和推理。

1.4　小数

◉**学习目标**

- 理解小数的意义、小数的性质与大小比较。
- 掌握小数的四则运算，寻找小数运算与整数运算的联系与区别。

1.4.1　定义

现实生活中，仅有整数是不能满足人们进行精确的度量、表达和计算的。例如，长度的基本单位是米，用米作为单位来测量一张桌面的长，1 米多一点，但又远不足 2 米，我们用整数来表示，结果就是大约 1 米。如果我们把 1 米平均分成 10 份，再用一小份作为单位去测量多出的长度，结果是 2 个小份多差一点到 3 小份，我们就说结果大约为 1. 3 米，这就比大约 1 米更精确了。如果我们再把 1 小份平均分成 10 小小份，再用一个小小份作为单位来测量 2 小份之后剩下的部分，发现接近 8 小小份，我们就说桌面长 1. 28 米。这就比 1. 3 米更精确了。这样，就产生了小数。

在人类历史上，小数的产生比较晚，远在整数（主要指自然数）与分数之后。目前，关于小数的定义，比较传统的观点是：小数是十进分数的一种书写形式。

定义 1（十进分数定义）　人们为了应用方便，把十进分数改写成不带分母的形式，并且按照十进制的进位原则把个位右边的第 1 位、第 2 位、第 3 位……分别表示十分位$\left(\text{计数单位是}\frac{1}{10}\right)$、百分位$\left(\text{计数单位是}\frac{1}{100}\right)$、千分位$\left(\text{计数单位是}\frac{1}{1000}\right)$……，并在个位和十分位之间加一个标记“. ”，这样十进分数就可以写成与整数相仿的形式。

比如$3\frac{24}{100}=3+\frac{2}{10}+\frac{4}{100}=3.24$。像 3. 24 这样不带分母，按照十进制的位值原则写出来的十进分数叫作十进小数，简称小数。

然而，按照上述定义，将十进分数改写成不带分母形式的数只能是一些有限小数，既不包括无限循环小数，也不包括无限不循环小数。例如，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{15}$改写为

不带分母的数分别是 $0.\dot{3}$ 和 $0.2\dot{6}$，按照上面的定义，这两个循环小数就不能称为“小数”了。还有圆周率的值 3.14159265…，$\sqrt{2}$的值 1.41421356…，由于它们都不是十进分数改写而成的，如果按照上述定义，就都不能称为“小数”了。

定义 2（整数延伸定义）①　小数的本质是整数的延续，都是十进制数。也就是说，以 1 为基本单位，向大小两个方向延伸得到整数和小数：单位 1 向大的方向延伸，10 个 1 构成十，10 个十构成百，10 个百构成千……；单位 1 向小的方向延伸，把 1 平均分成 10 份，一份就是 0.1（相当于十分之一），再把 0.1 平均分成 10 份，一份就是 0.01（相当于百分之一）……。所以，一个十进制整数或者小数

$$n_p\cdots n_2n_1n.m_1m_2\cdots m_q = n_p\times10^p+\cdots+n_2\times10^2+n_1\times10^1+n\times10^0+m_1\times10^{-1}+m_2\times10^{-2}+\cdots+m_q\times10^{-q}$$

其中，p，q 为正整数；n，n_i，m_i（$i=0$，1，2，…）为 0 – 9 这十个数字之一。

尽管上述定义存在差异，但以下规定是明确的：①有限小数和无限小数统称为小数；②小数中，小数点左边的部分叫作小数的整数部分，小数点右边的部分叫作小数的小数部分。

整数部分为零的小数叫作纯小数，整数部分不为零的小数叫作带小数。

实际生活中，小数的位数更多用来表示精确程度。比如，某人身高 1.72 米，精确到的是厘米。如果说某张纸的厚度是 0.000458 米，那么精确到的是微米。显然，后者的精度要高很多。圆周率的计算历史从某种程度上反映了人类对测量精度的追求。

一般认为，小数的读法是这样的：小数整数部分的读法与整数的读法相同，小数点读作“点”，小数部分按顺序读出每个数字。比如，112.568 读作：一百一十二点五六八。

拓展阅读　小数的级数定义②

小数的级数定义是以高等数学中一个容易证明的引理为基础的。

引理　设 P_k 是整数，且 $0\leqslant P_k\leqslant9$（$k=1$，2，3，…），则级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{P_k}{10^k}$是收敛

① 曾小平，韩龙淑．小数是特殊的分数吗：小数的意义与教学探究［J］．教学月刊小学版（数学），2012（7/8）：31.

② 戎松魁．如何正确理解小数的意义［J］．小学教学（数学版），2013（24）：20.

的，即级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{P_k}{10^k}$存在极限，设为$\beta$。

从这个引理出发，我们给出小数的定义。

（1）根据十进制的位值原则，和$\alpha = P_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{P_k}{10^k}$记成$\alpha = \overline{P_0.P_1P_2\cdots P_n}$。其中，$P_0$是非负整数，$P_k$为0，1，2，3，4，5，6，7，8，9这十个整数之一（$k=1$，2，3，…，n），称$\alpha = \overline{P_0.P_1P_2\cdots P_n}$为非负有限小数。其中，小圆点“·”叫作小数点。当$P_0$，$P_k$（$k=1$，2，3，…，$n$）不全为零时，称$-\alpha = -\overline{P_0.P_1P_2\cdots P_n}$为负有限小数。非负有限小数和负有限小数统称为有限小数。

（2）根据十进制的位值原则，和$\beta = P_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{P_k}{10^k}$记成$\beta = \overline{P_0.P_1P_2\cdots P_n\cdots}$。其中，$P_0$是非负整数，$P_k$为0，1，2，3，4，5，6，7，8，9这十个整数之一（$k=$ 1，2，3，…），称$\beta = \overline{P_0.P_1P_2\cdots P_n\cdots}$为非负无限小数。其中，小圆点“·”叫作小数点，当$P_0$，$P_k$（$k=1$，2，3，…，$n$，…）不全为零时，称$-\beta = -\overline{P_0.P_1P_2\cdots P_n\cdots}$为负无限小数。非负无限小数和负无限小数统称为无限小数。由此可见，无限小数是无穷级数的极限。

应该说，该定义虽然比较抽象，但是比较好地刻画了小数的本质。利用该定义，也比较好解释小数的运算。

1.4.2 性质

小数有以下两个主要的性质。

性质1 小数末尾添上或去掉几个零，小数的大小不变。

性质1被称为小数的基本性质，在进行计算时会经常被用到。需要说明的是，小数末尾添上或去掉几个零，虽然小数的大小不变，但是在实际生活中，小数表示的数量的精确程度会发生变化。

性质2 小数中小数点位置的移动会引起小数大小的变化：小数点向右移动n（n是大于0的自然数）位，这个小数就扩大到原数的10^n倍；小数点向左移动n位，这个小数就缩小到原数的$\frac{1}{10^n}$。

性质2告诉我们，小数点往往起到定位的作用。

1.4.3　有限小数的运算

1. 加减运算

小数加减法运算，本质上是相同计数单位上的数相加减。因此，竖式计算时，首先把要进行运算的两个数的小数点对齐（这样相同数位上的数就对齐了），然后按照整数加减法的法则进行运算。

例如，计算 $7.2-4.43=2.77$ 的过程如图 1.4－1 所示。

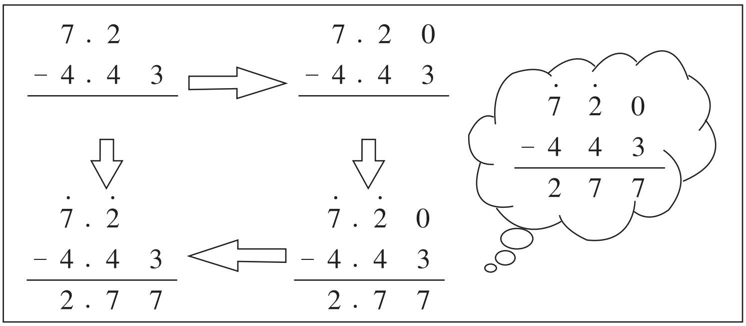


图 1.4－1

2. 乘法运算

小数乘法，通常是移动因数的小数点，把小数乘法转化为整数乘法进行计算。算出整数乘积之后，再反向移动该乘积的小数点（移动位数为因数移动位数之和，不足时添 0 补足）。

下面以 3.8×3.2 为例进行说明，如图 1.4－2 所示。将 3.8 和 3.2 的小数点各向右移动一位，化为 38×32，计算得 1216，再把 1216 的小数点（相当于在 6 后面），向左移动 2 位，得到 $3.8\times3.2=12.16$。

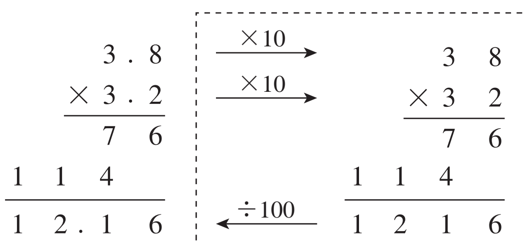


图 1.4－2

不难发现，其中的算理是

$$
\begin{aligned}
&3.8\times3.2\\
=&(3.8\times10)\times(3.2\times10)\div(10\times10)\\
=&38\times32\div100\\
=&1216\div100\\
=&12.16。
\end{aligned}
$$

3. 除法运算

首先看除数是整数的情形，本质上和“整数除以整数”是一样的，都是将被除数分解为多个数的和除以除数，再根据除法分配律进行计算。如果某一位不够除，则自动向下一位转移，除到哪位，商到哪位。例如

$$
\begin{aligned}
&12.9\div6\\
=&[(12+6\times(0.1)+30\times(0.01)]\div6\\
=&12\div6+6\times(0.1)\div6+30\times(0.01)\div6\\
=&2+1\times(0.1)+5\times(0.01)\\
=&2.15。
\end{aligned}
$$

这个过程，可用竖式表示为图 1.4－3 的形式。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2.\ 1\ 5 \\ \hline
6 & 1\ 2.\ 9\ 0 \\
 & 1\ 2. \\ \cline{2-2}
 & 0.\ 9 \\
 & 0.\ 6 \\ \cline{2-2}
 & 0.\ 3\ 0 \\
 & 0.\ 3\ 0 \\ \cline{2-2}
 & 0.\ 0\ 0
\end{array}
\quad \text{简写为} \quad
\begin{array}{r|r}
 & 2.\ 1\ 5 \\ \hline
6 & 1\ 2.\ 9 \\
 & 1\ 2 \\ \cline{2-2}
 & 9 \\
 & 6 \\ \cline{2-2}
 & 3\ 0 \\
 & 3\ 0 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

图 1.4－3　竖式表示

如果除数是小数，则根据除法中商不变的性质，除数和被除数同时扩大 10^n（n 为除数的小数位数），先把算式转化为除数是整数，再按除数是整数进行计算。

例如，计算 $1.29\div0.6$，就是根据除法中商不变的性质，把被除数和除数同时扩大 10 倍得到 $12.9\div6$，再按照上述方法进行计算。

需要说明的是，在小数除法中，不讨论余数问题。同时，有了小数除法后，整数除法中带余数的除法可以转化为小数除法进行计算。

比如 $7\div4$，就可以得到结果 1.75，具体算法如图 1.4－4 所示。

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 1.\ \ 7\ \ 5 \\ \cline{2-2}
4 \big) & 7.\ \ 0\ \ 0 \\
 & 4. \\ \cline{2-2}
 & 3.\ \ 0 \\
 & 2.\ \ 8 \\ \cline{2-2}
 & 0.\ \ 2\ \ 0 \\
 & 0.\ \ 2\ \ 0 \\ \cline{2-2}
 & 0.\ \ 0\ \ 0
\end{array}
$$

简写为

$$
\begin{array}{r@{\,}r}
 & 1.\ \ 7\ \ 5 \\ \cline{2-2}
4 \big) & 7 \\
 & 4 \\ \cline{2-2}
 & 3\ \ 0 \\
 & 2\ \ 8 \\ \cline{2-2}
 & 2\ \ 0 \\
 & 2\ \ 0 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

图 1.4－4　具体算法

这样一来，小数除法的结果会出现两种情形：第一种，经历有限次运算便停止了，商为整数或者有限小数（此时，习惯上叫作除尽）；第二种，一直可以除下去，商为无限循环小数（此时，习惯上叫作除不尽）。

1.5　分数

◉学习目标

- 理解分数的定义和基本性质，能熟练进行约分与通分。
- 掌握分数四则运算的计算原理与算法，能熟练进行分数运算。
- 能熟练进行小数与分数的互化，理解分数化成有限小数的条件。

1.5.1　分数的产生

在人类社会发展过程中，为了统计事物数量，人类创造了整数。但是，随着社会的发展，仅有整数就不够用了，人类很快又发明了分数[①]。人类创造分数，主要有两个原因：一是测量需要，二是运算需要。

1. 测量需要

如果我们用单位线段 E 去度量线段 A（如图 1.5－1 所示），量 2 次之后剩下的不够一个 E 的长，我们就可以把单位长度 E 平均分成 4 份，取其中一份 $\frac{1}{4}$ 作为新的长度单位去量 A 剩下的那段，如果 3 次刚好量尽，那么剩下的这一段就可以用

---

① 本节所讲的整数指非负整数（通常所说的自然数），分数指正分数。关于负分数，可以做类似讨论。

分数$\frac{3}{4}$表示。A 可以用 $2+\frac{3}{4}$表示，也可用带分数 $2\frac{3}{4}$表示，还可以用假分数$\frac{11}{4}$表示。

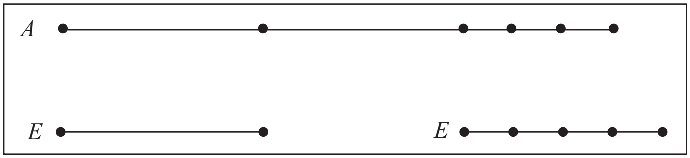


图 1.5－1

可见，我们用一个长度单位 E 去度量另一个长度 A，如果量了 a 次，刚好量尽，我们可以用一个整数 a 来表示度量结果；如果不能量尽（剩下的一段不够一个 E 的长度），我们就可以把单位长度 E 平均分成 n 份，取其中一份作为新的长度单位去量 A 剩下的那段，如果 m 次刚好量尽，那么剩下这一段就可以用分数$\frac{m}{n}$表示。

2. 运算需要

因为整数对除法运算是不封闭的，即两个整数相除，可能存在整数商，也可能不存在整数商。对后一种情况，人们总希望用一个数很简单地表示结果，这就产生了分数。

例如，4 个小朋友平均分 3 个苹果，每人分得$\frac{3}{4}$个苹果。把一根 13 米长的绳子平均分成7 段，每一段的长度是 $13\div7=\frac{13}{7}\left(或\ 1\frac{6}{7}\right)$米。注意，这里的$\frac{3}{4}$和$\frac{13}{7}$后面带有单位，它们表示的是一个具体量。

再如，把一根绳子平均分成 5 段，每一段占全长的 $1\div5=1:5=\frac{1}{5}$。五年级（2 班）有男生 17 人，女生 19 人，男生占全班人数的 $17\div36=17:36=\frac{17}{36}$，男生占女生人数的 $17\div19=17:19=\frac{17}{19}$。注意，这里的$\frac{1}{5}$、$\frac{17}{36}$和$\frac{17}{19}$后面没有单位，它们表示的是一个比率。

一般地，对于两个整数 m 和 n，如果 $m\div n$ 的商不是整数，我们就用分数$\frac{m}{n}$来表示商，可见 $m\div n=\frac{m}{n}$。由于两个数（量）相除，又可以叫作两个数（量）的

比，故 $m \div n = m : n = \frac{m}{n}$①。

1.5.2　分数的定义

一般地，我们把形如$\frac{m}{n}$的数叫作分数（m 和 n 都是整数，且 $n>1$）。m 叫作分数的分子，n 叫作分数的分母，中间的短横线叫作分数线。$\frac{m}{n}$读作“n 分之 m”。

需要说明的是，上述定义中，m 和 n 都是整数，且 $n>1$，$m \div n$ 的商不是整数，因此分数是不包括整数的。这是分数严格的定义，不妨叫作分数的狭义定义。由该定义产生的分数，是标准的分数（不含整数）。

如果减少对 m 和 n 的限制，m 可以是 0，n 可以是 1。为此，我们补充定义：当 $n=1$ 时，$\frac{m}{n}=\frac{m}{1}=m$；当 $m=0$ 时，$\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$。

这样，我们将分数的定义扩充为：形如$\frac{m}{n}$（m 和 n 都是整数，$n \neq 0$）的数叫作分数。把$\frac{1}{n}$叫作分数$\frac{m}{n}$的分数单位，$\frac{m}{n}$中含有 m 个$\frac{1}{n}$。

这是分数的扩充定义，不妨叫作分数的广义定义。由该定义产生的数其实是有理数（包括分数和整数），是形式上的分数。

注意，在小学数学中，将分数定义为：把单位 1（可以是一个个体，也可以是一个整体）平均分成若干份，表示这样一份或者几份的数，叫作分数。这是一种形象化的定义，并不是本质性定义，而且该定义仅仅表示小于或等于 1 的分数，并不表示大于 1 的分数。

1.5.3　分数的性质

1. 分数的基本性质

如果分数的分子和分母同时乘（或除以）一个相同的不等于零的数，分数的大小不变，即

① 进入中学阶段，我们把两个数（式）相除（或比）都统一写成分数（分式）形式。因此，除、比、分数在本质上是相通的。

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m};\ \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}\qquad (m\neq 0)$$

证明：由分数与整数除法的关系和整数除法中商不变的性质，可得

$$\frac{a}{b}=a\div b=(a\times m)\div(b\times m)=\frac{a\times m}{b\times m}$$

$$\frac{a}{b}=a\div b=(a\div m)\div(b\div m)=\frac{a\div m}{b\div m}$$

2. 约分和通分

约分　把一个分数的分子、分母分别除以它们的公约数（1除外），化成与原分数相等的分数，叫作约分。

比如，$\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$，$\frac{75}{35}=\frac{15}{7}$。

分子和分母互质的分数叫作最简分数。约分时，通常都要约成最简分数。

通分　把几个分数化成分母相同的分数而不改变每个分数的大小，叫作通分。

例如，把$\frac{7}{12}$和$\frac{5}{9}$通分，结果为$\frac{21}{36}$和$\frac{20}{36}$，也可以是$\frac{63}{108}$和$\frac{60}{108}$，还可以是$\frac{42}{72}$和$\frac{40}{72}$…。化成的相同的分母叫作这几个分母的公分母。

3. 比较分数的大小

比较两个分数的大小：如果分母相同，分子大的分数大；如果分子相同，分母大的分数小。如果分母不同，则化为同分母或同分子分数来比较大小。

例如，要比较$\frac{7}{12}$和$\frac{5}{9}$的大小，可以先通分化为同分母分数，$\frac{7}{12}=\frac{21}{36}$，$\frac{5}{9}=\frac{20}{36}$，因为$\frac{21}{36}>\frac{20}{36}$，所以$\frac{7}{12}>\frac{5}{9}$；还可以通分化为同分子分数$\frac{7}{12}=\frac{35}{60}$，$\frac{5}{9}=\frac{35}{63}$，因为$\frac{35}{60}>\frac{35}{63}$，所以$\frac{7}{12}>\frac{5}{9}$。

电子图书馆

[1] 曾小平，韩龙淑．分数的定义与教学［J］．小学教学（数学版），2011（9）：47－49.

[2] 蔡金法．数学教育中的疑难问题［J］．小学教学（数学版），2014（7）：6－9.

1.5.4　分数运算

1. 分数加减法

同分母分数加减运算时，分母不变，分子相加减。异分母分数加减运算时，先通分化成同分母分数，再进行运算。运算的结果一般要化成最简分数。

为什么分数加减法是这样计算呢？

一般地，我们有

$$\frac{b}{a} \pm \frac{d}{c}$$

$$\xlongequal{\text{分数定义}} \left(b\text{ 个}\frac{1}{a}\right) \pm \left(d\text{ 个}\frac{1}{c}\right)$$（注意：不等量$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{c}$不能直接进行数量加减法计算）

$$\xlongequal{\text{不等量}\frac{1}{a}\text{和}\frac{1}{c}\text{化为相等量}\frac{1}{ac}} \left(b\text{ 个}\frac{c}{ac}\right) \pm \left(d\text{ 个}\frac{a}{ac}\right)$$

$$\xlongequal{\text{分数定义}} \left(bc\text{ 个}\frac{1}{ac}\right) \pm \left(ad\text{ 个}\frac{1}{ac}\right)$$

$$\xlongequal{\text{相等量可以直接进行数量加减法运算}} (bc \pm ad)\text{ 个}\frac{1}{ac}$$

$$\xlongequal{\text{分数定义}} \frac{bc \pm ad}{ac}\text{。}$$

换一个角度看，

$$\frac{b}{a} \pm \frac{d}{c}$$

$$= b \div a \pm d \div c$$

$$= bc \div ac \pm ad \div ac$$

$$= (bc \pm ad) \div ac$$

$$= \frac{bc \pm ad}{ac}\text{。}$$

2. 分数乘法

分数的乘法法则：两个分数相乘，分子的乘积为分子，分母的乘积为分母，即$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$。

为什么分数乘法是这样计算呢？

从度量的角度看，$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}$表示$\frac{b}{a}$的$\frac{d}{c}$是多少，即把$\frac{b}{a}$平均分成 c 份，每一份为$\frac{b}{ac}$，其中的 d 份为$\frac{bd}{ac}$。

以$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$为例，如图 1.5－2 所示，即把$\frac{4}{5}$平均分成 3 份，每一份为$\frac{4}{15}$，其中的 2 份为$\frac{8}{15}$。

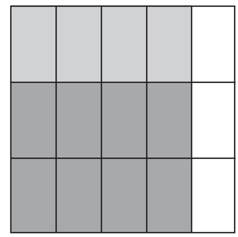


图 1.5－2

从除法角度看，

$$\begin{aligned}&\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}\\&=b\div a\times d\div c\\&=(b\times d)\div(a\times c)\\&=\frac{b\times d}{a\times c}。\end{aligned}$$

教学链接 | 分数乘分数

小学教学中，为了让学生更好地理解分数乘法的运算法则，可以采用面积方法。下面以计算$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$为例，想象为求长为$\frac{4}{5}$、宽为$\frac{2}{3}$的长方形的面积。

做一个边长为 1 的正方形，把其中一边平均分成 5 份，邻边平均分成 3 份，考察长为$\frac{4}{5}$、宽为$\frac{2}{3}$的长方形，如图 1.5－3 所示。容易发现，这个长方形的面积为$\frac{8}{15}$，从而得到$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$。

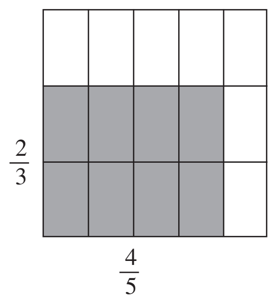


图 1.5－3

3. 分数除法

分数的除法法则：两个分数相除，等于被除数乘除数的倒数，即$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}$。

为什么分数除法是这样计算呢？因为

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} \\
&= (b \div a) \div (d \div c) \\
&= bc \div ad \\
&= \frac{bc}{ad}\text{。}
\end{aligned}$$

教学链接 | 分数除法

根据商不变的性质理解分数除法的运算算理，下面以计算$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$为例进行说明。

除数为$\frac{2}{3}$不好计算，如果把除数转化成 1，就好计算了。根据商不变的性质，被除数和除数同时乘$\frac{3}{2}$，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} \\
&= \left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}\right) \div \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right) \\
&= \left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}\right) \div 1 \\
&= \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{12}{10} \\
&= \frac{6}{5}\text{。}
\end{aligned}$$

1.5.5　分数与小数

容易发现，分数和小数各有其特点。分数书写比较简洁，运算比较简单，但不直观。小数比较直观，但有时运算和书写比较复杂。因此，实际生活中，我们往往根据实际需要，进行分数和小数的相互转化。

1. 小数化分数

小数化分数，只要把小数部分化为分数就好办了。

当小数部分为有限小数时，把它乘 10^n（n 为小数位数）作为分子，分母为 10^n。例如，$2.78=2+0.78=2+\frac{78}{100}=2\frac{78}{100}=2\frac{39}{50}$。

当小数部分为无限循环小数时，将小数写成无穷递缩等比数列，用级数求和方式计算，可化为分数。例如，$2.6\dot{7}\dot{8}=2+\frac{6}{10}+\frac{78}{1000}+\frac{78}{100000}+\cdots=2+\frac{3}{5}+\frac{\frac{78}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=2\frac{336}{495}$。

当小数部分为无限不循环小数时，就没办法化成分数了（因为这是无理数了）。

2. 分数化小数

分数化小数的计算方法是，用分子除以分母，得到小数形式的商。结果可能为有限小数，也可能为循环小数。

定理 1 最简真分数 $\frac{a}{b}$ 能化为有限小数的充要条件是：分母 b 只含有质因数 2，5。

证明：（充分性）设 $b=2^m\times5^n$（m，n 是整数，至少有一个不是 0），于是

$\frac{a}{b}=\frac{a\times2^n\times5^m}{2^{m+n}\times5^{m+n}}=\frac{a\times2^n\times5^m}{10^{m+n}}$。

因为右边是一个以 10^{m+n} 为分母的分数，所以 $\frac{a}{b}$ 能表示成有限小数。

（必要性）设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{10^m}$（$c$ 为整数），于是 $bc=a\cdot10^m$（分数相等的定义），得 $b\mid a\cdot10^m$（整除的定义）。

又 $(a,b)=1$，所以 $b\mid10^m$。

而 10^m 只含有质因数 2，5，所以 b 只含有质因数 2，5。

定理 2 如果一个最简真分数 $\frac{a}{b}$ 的分母 b 只含有 2 和 5 以外的质因数，那么①这个分数所化成的小数是纯循环小数；②这个纯循环小数循环节的最少位数，

与分母能整除$\overbrace{999\cdots9}^{t\text{个}}$时 9 的最少个数 t 相同。①

定理 3　如果一个最简真分数$\dfrac{a}{b}$的分母 b 里，既含有质因数 2 或 5，又含有 2 和 5 以外的质因数，那么①$\dfrac{a}{b}$所化成的小数是混循环小数；②它的小数部分中，不循环的位数等于分母里的质因数 2 和 5 中较大的一个数；③循环节的最少位数，与分母里 2 和 5 以外的质因数的积能整除$\overbrace{999\cdots9}^{t\text{个}}$时 9 的最少个数 t 相同。②

1.6　数与运算的一致性

◉学习目标

- 理解整数、小数和分数含义的一致性，并能解释相关的计数问题。
- 理解整数、小数和分数运算的一致性，并能解释相关的运算问题。

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》加强了学生对数与运算的概念和本质的理解，增加了“体会数是对数量的抽象，感悟数的概念本质上的一致性，形成数感和符号意识；感悟数的运算以及运算之间的关系，体会数的运算本质上的一致性，形成运算能力和推理意识”。“数与运算的一致性”就成为近年学术界讨论的热点话题。

1.6.1　数的一致性

人类在蒙昧时代就具有辨别事物多少的能力，后来逐渐发展成数的概念。早期的人类首先注意到一个人与一群人、一个石子与一堆石子的区别；后来逐渐意识到一个人、一个果子……之间存在共同的数量属性（用 1 表示），它构成了数的基本单位（用 1 表示）。同样，人类注意到两个人、一双手、两个石子等之间可以一一对应，由两个基本单位构成，即存在数量上的共同属性（用 2 表示）。以此类推，人类创造了 3，4，5…，用来表示自然界中物体的个数。现在，我们把 0，1，2，3，4，5…这样的数叫作自然数。

---

①　人民教育出版社小学数学室．小学数学教材教法：第一册［M］．北京：人民教育出版社，1994：208－211.

②　同①212－213.

在有了自然数之后，人们开始关注那些不到 1 的事物怎么用数来表示。古人把一个物体平均分成两份，每一份叫作“半”；平均分成三份，一份叫作“少（shào）半”，两份合在一起可以组成更大的半，叫作“太半”。这样慢慢地就有了分数的概念，后来“半”、“少半”和“太半”用分数表示就是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$。

人们面对进率多种多样的分数，又觉得像自然数那样，用十进制似乎更直观，于是就想到把 1 平均分成 10 份、100 份……，记作 0.1，0.01，…于是又产生了一种数，就是小数。

不论是整数、分数还是小数，都是数（shǔ）出来的。例如，3 个 100、4 个 10 和 5 个 4，记作 345；3 个$\frac{1}{4}$记作$\frac{3}{4}$；3 个 0.1 和 5 个 0.01 记作 0.35。

可见，数概念和数感也正是在数数（shǔ shù）的过程中不断发展起来的，是基于对现实世界数量的抽象表达。因此，数（shù）源于数（shǔ），数（shù）是数（shǔ）出来的。计数，就是在确定计数单位 1 之后，建立其他计数单位，然后使用数表示事物计数单位上事物的个数。

例如，数一数图 1.6－1 中小方块的粒数，即有多少个小方块。我们首先确定一个小方块为单位 1，一条为 10 粒，一板为 100 粒，一坨为 1000 粒。我们可以数出图中有 2 坨 7 板 4 条 3 粒，因此一共有小方块 2743 个，即 2743 等于 2000＋700＋40＋3。

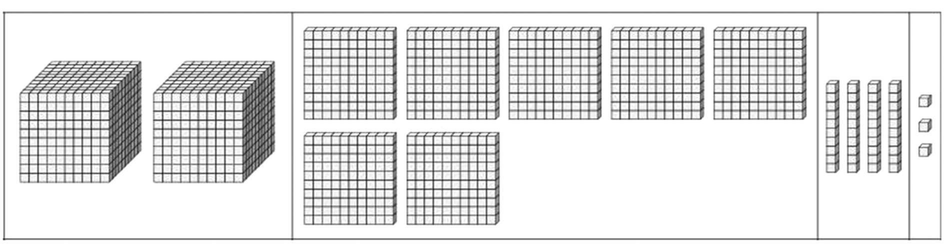


图 1.6－1

换个角度，数一数图 1.6－1 中大立方体的个数，即有几坨。我们首先确定一个大立方体为单位 1，1 个大方块可以分成 10 板（每块记作 0.1），1 板可以分成 10 条（每条记作 0.01），1 条可以分成 10 粒（每粒记作 0.001）。我们可以数出图中有 2 坨 7 板 4 条 3 粒，因此一共有大立方体 2.743 个，即 2.743＝2＋0.7＋0.04＋0.003。

又如，数一数图 1.6－2 中阴影的圆的个数，即有几个阴影的圆。我们先确定一个圆为单位 1，把一个圆平均分成三份，每份为$\frac{1}{3}$，相当于 $1 \div 3=\frac{1}{3}$。我们可以数出图中有阴影的圆 $2\frac{1}{3}$个。我们换个角度看，图中有 7 份，每份$\frac{1}{3}$，就是$\frac{7}{3}$，因此$\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$。

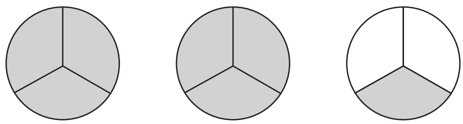


图 1.6－2

1.6.2　运算的一致性

（1）整数、小数和分数的加减法，本质上是合并同类项，即数相同计数单位的事物的个数。只不过需要注意相邻计数单位之间的转换，且要将结果化为比较简单的形式。

例如，整数计算 2743＋1532＝4275 的过程如图 1.6－3 所示，基本原理是这样的。

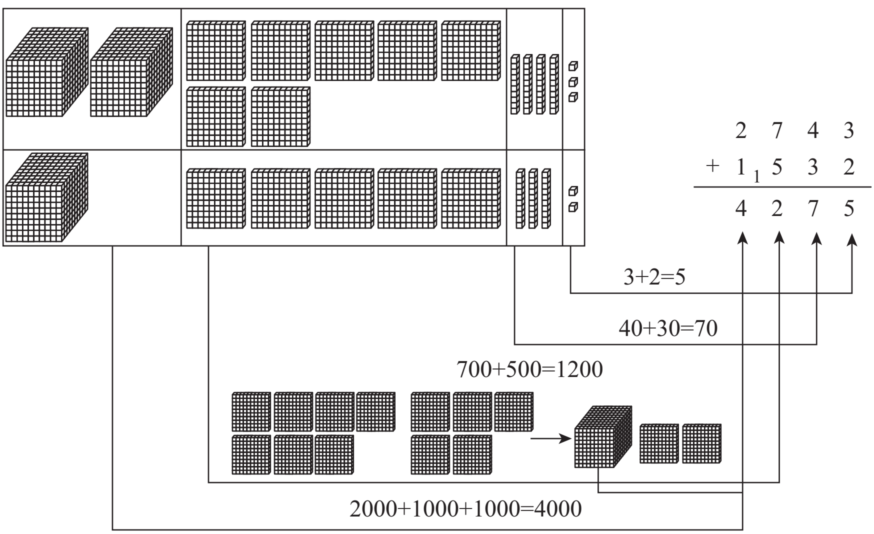


图 1.6－3

$$
\begin{aligned}
&2743+1532\\
=&(2000+700+40+3)+(1000+500+30+2)\\
=&(2000+1000)+(700+500)+(40+30)+(3+2)\\
=&3000+1200+70+5\\
=&3000+1000+200+70+5\\
=&4000+200+70+5\\
=&4275
\end{aligned}
$$

类似的，我们可以讨论整数减法、小数加减法的计算原理和过程（本书从略）。

两个分数相加减，其实也是合并分母相同的项。当分母不同时，需要通分转化成同分母分数，即构造同类项，然后再合并同类项，如图 1.6－4 所示。

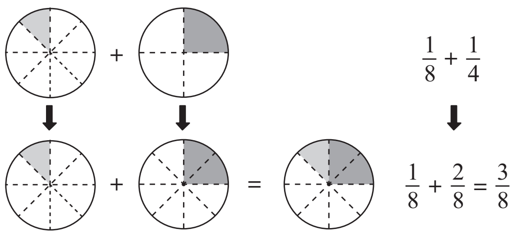


图 1.6－4

（2）整数、小数和分数的乘法运算，就是求几个几的结果，也可以直观地理解为求长方形的面积。

例如，15×13 就是计算 13 个 15 相加的结果。因为 13 个 15 相加等于 195，所以 $15\times13=195$。也可以直观地看作长 15 宽 13 的长方形的面积为 195（如图 1.6－5 所示），所以 $15\times13=195$。

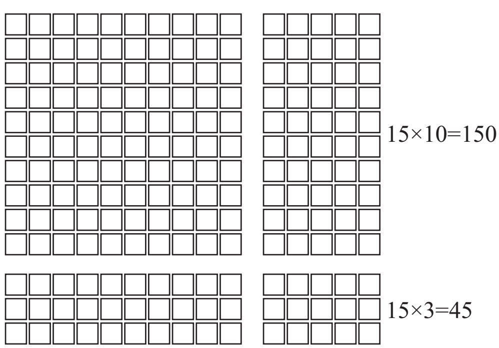


图 1.6－5

从算法上看，$15\times13=15\times(10+3)=15\times10+15\times3=150+45=195$。

又如，1.5×1.3 就是计算 1.3 个 1.5 的结果。因为 1.3 个 1.5 相加等于 1.95，所以 $1.5\times1.3=1.95$。也可以直观地看作长 1.5 宽 1.3 的长方形的面积为 1.95（如图 1.6－6 所示），所以 $1.5\times1.3=1.95$。

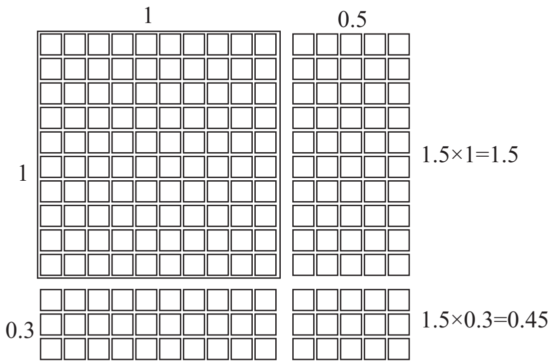


图 1.6－6

从算法上看，$1.5\times1.3=1.5\times(1+0.3)=1.5\times1+1.5\times0.3=1.5+0.45=1.95$。

1.5×1.3 也可以理解为 15 行长为 0.1、13 列宽为 0.1 的小正方形组成的大长方形的面积。这样的话，$1.5\times1.3=(15\times0.1)\times(13\times0.1)=(15\times13)\times(0.1\times0.1)=195\times0.01=1.95$，如图 1.6－7 所示。

$$
\begin{array}{r} 1.5 \\ \times\ 1.3 \\ \hline 45 \\ 15 \\ \hline 1.95 \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \times10\rightarrow \\ \times10\rightarrow \\ \\ \\ \leftarrow\div100 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 13 \\ \hline 45 \\ 15 \\ \hline 195 \end{array}
$$

图 1.6－7

这样我们就能很好地理解小数乘法的算法，即“先按照整数乘法算出积，再点小数点；点小数点时，看因数中一共有几位小数，就从积的右边起数出几位，点上小数点”。

再如，分数乘法$\frac{7}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{56}{20}$，可以理解为长为$\frac{7}{4}$宽为$\frac{8}{5}$的长方形的面积为$\frac{56}{20}$（如图 1.6－8 所示），还可以理解为$\frac{7}{4}\times\frac{8}{5}=\left(7\times\frac{1}{4}\right)\times\left(8\times\frac{1}{5}\right)=(7\times8)\times$

$\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)=56\times\frac{1}{20}=\frac{56}{20}=\frac{14}{5}$。

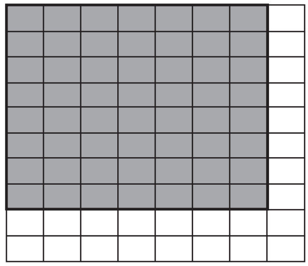


图 1.6－8

（3）整数、分数和小数的除法运算，本质上是乘法的逆运算。不同的是，在整数除法中，可能存在余数；而小数和分数除法中，没有余数，总能得到一个确定结果。

例如，对于整数除法 $623\div7=?$，实质是 $7\times(\quad)=623$，因为 $7\times89=623$，所以 $623\div7=89$。

$$\begin{array}{r}
89\\
7\overline{)623}\\
\underline{56}\\
63\\
\underline{63}\\
0
\end{array}$$

我们再看 $623\div7$ 的竖式，就能更好地理解。第一步，实质是计算 7 乘几个十小于等于 620。因为 $7\times80\leqslant620$，所以在十位商 8。第二步，$620-560$ 等于 60，60 加上 3 等于 63。第三步，计算 7 乘几个一小于等于 63。因为 $7\times9=63$，所以在个位商 9。

对于小数除法，可以类似地进行理解（本书从略）。

对于分数除法，计算时也可以转化为分数乘法来计算。

例如，我们计算 $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$ 时，可以想 $\frac{2}{3}\times\frac{(\quad)}{(\quad)}=\frac{4}{5}$。根据等式性质，两边同乘 $\frac{3}{2}$ 得到 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{(\quad)}{(\quad)}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$，即 $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$。

理解数与运算的一致性，有助于我们站在更高的角度认识小学数学中的“数与运算”这部分内容。需要注意的是，分数的运算有更强的普适性，有时候小数运算也可以转化成分数运算来进行，而且计算过程可能更为简洁。

电子图书馆

[1] 赵莉，吴正宪，史宁中．小学数学教学数的概念与运算一致性的研究与实践：以“数与运算”总复习为例 [J]. 课程・教材・教法，2022 (8)：122 - 129.

[2] 巩子坤，史宁中，张丹．义务教育数学课程标准修订的新视角：数的概念与运算的一致性 [J]. 课程・教材・教法，2022 (6)：45 - 51，56.

[3] 巩子坤，刘萍．论数的概念与运算的一致性之三：整数运算算理、算法的一致性 [J]. 小学数学教师，2022 (10)：77 - 81.

[4] 巩子坤，张丹．论数的概念与运算的一致性之四：分数运算算理、算法的一致性 [J]. 小学数学教师，2022 (12)：85 - 88.

[5] 巩子坤，刘萍．论数的概念与运算的一致性之五：小数运算算理、算法的一致性 [J]. 小学数学教师，2023 (1)：78 - 82.

练　习　一

1. 读出下列各数。

（1）43571600。　　（2）90000560001。

（3）756004080。　　（4）8400573000。

2. 阐述基于自然数序数理论的加法和乘法定义，并基于该定义计算 $6+4$ 和 6×4。

3. 任意两个自然数 a 和 b，定义新运算⊙，使得以下等式成立：①$1\odot a=a$；②$a\odot b=(a-1)\odot b+ab$ 。计算 $3\odot5$。

4. 计算 $14-6$ 时有以下几种方法，说一说每种方法的道理。

（1）从 14 起往回数数，13，12，11，10，9，8，结果为 8。

（2）从 14 中减去 4 得 10，再从 10 中减去 2 得 8，结果为 8。

（3）从 10 里减去 6 得 4，再 $4+4=8$，结果为 8。

（4）因为 $6+8=14$，所以 $14-6=8$。

5. 在自然数范围内，证明下列结论。

（1）$a-(b+c)=a-b-c$。　　（2）$a-(b-c)=a-b+c$ 。

（3）$a\div(b\div c)=a\div b\times c$。　　（4）$a\div(b\times c)=a\div b\div c$ 。

6. 计算 32×12 时有以下几种方法，说一说每种方法的道理。

（1）$32\times4+32\times8$。　　（2）$32\times6\times2$。　　（3）$32\times10+32\times2$。

7. 两个学生在讨论 $0\div0$ 等于多少。甲说：“因为 $0\times0=0$，所以 $0\div0=0$。”乙

说：“因为 $0\times1=0$，所以 $0\div0=1$。”他们的说法对吗？为什么？根据你的理解说一说 0 为什么不能作除数。

8. 阐述负整数的数学本质，并计算 $(-6)-(-4)$ 和 $9-(-4)$。

9. 把下列分数化成小数。

（1）$\dfrac{13}{40}$。　　（2）$2\dfrac{13}{43}$。　　（3）$\dfrac{15}{16}$。

10. 把下列循环小数化为分数。

（1）$0.\dot{2}3\dot{4}$。　　（2）$1.2\dot{3}$。　　（3）$0.4\dot{4}\dot{5}$。

11. 请用多种方法解释或者推导下列分数运算式子。

（1）$\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{10}$。　　（2）$\dfrac{9}{10}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}$。

（3）$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{6}{35}$。　　（4）$\dfrac{6}{35}\div\dfrac{3}{7}=\dfrac{2}{5}$。

12. 小学生在计算小数除法 $1.7\div0.2$ 时，有时会这样解答：$1.7\div0.2=17\div2=8\cdots\cdots1$。假如你是老师，你如何处理这种做法？

13. 解数字谜。

（1）
$$\begin{array}{r} \square\,\square\,9\,\square \\ -\quad \square\,\square\,9 \\ \hline \square\,9 \end{array}$$

（2）
$$\begin{array}{r} \square\,\square \\ \times\ 6\ 7 \\ \hline \square\,\square\,\square \\ \square\,\square\,\square\ \ \\ \hline \square\,\square\,1\,5 \end{array}$$

（3）
$$\begin{array}{r} \square\,7\,\square \\ \square\,\overline{)\,2\,\square\,\square\,\square} \\ \square\,\square\quad\ \ \\ \hline \square\,\square\ \ \\ 2\,\square\ \ \\ \hline \square\,\square \\ \square\,\square \\ \hline 0 \end{array}$$

14. 甲、乙、丙、丁四人彼此借钱，甲借了乙 10 元，乙借了丙 20 元，丙借了丁 30 元，丁借了甲 40 元。某天，四人偶然相遇，他们商议借此机会把钱还清。用什么方法，使他们动用最少的钱还清彼此的债务？

15. 针对网上流传的速算小技巧，自己举例算一算，并分析其算法背后的算理。

（1）十几乘十几：个位乘个位为个位，个位之和为十位，十位之积为百位。例如，计算 15×17，注意到 $5\times7=35$，$5+7=12$，$1\times1=1$，那么 $15\times17=255$。

（2）两位数乘两位数：个位乘个位为个位，个位与十位交叉相乘之和为十位，十位乘十位之积为百位。例如，计算 45×23，注意到 $5\times3=15$，$4\times3+2\times5=22$，$4\times2=8$，那么 $45\times23=1035$。

（3）九十几乘九十几：计算 100 减两个乘数的差，两差之积为末两位，100 减两差为前两位，结果为四位数。例如，计算 95×93，计算 $100-95=5$，$100-93=7$，$5\times7=35$，$100-5-7=88$，那么 $95\times93=8835$。

16. 探索“有趣”的计算现象。

$74\times76=\square\square\square\square$　　　　$42\times48=\square\square\square\square$

$81\times89=\square\square\square\square$　　　　$16\times14=\square\square\square$

（1）先计算上述四题，后观察算式，你能发现什么结论？

（2）请证明你发现的结论（尽可能采用多种方法）。

（3）假如你是小学教师，你如何向三、四年级的学生讲述你的证明？

17. 计算 114×21 有以下一些方法，说一说这些方法的相同点和不同点。

$114\times20=2280$
$114\times1=114$
$2280+114=2394$

①

114×21
$=114\times7\times3$
$=798\times3$
$=2394$

②

114×21

×	100	10	4
20	2000	200	80
1	100	10	4

$$\begin{array}{r} 2280 \\ +\ 114 \\ \hline 2394 \end{array}$$

③

$$\begin{array}{rl} 114 & \\ \times\quad 21 & \\ \hline 114 & \cdots\cdots 114\times1 \\ 228\ \ & \cdots\cdots 114\times20 \\ \hline 2394 & \end{array}$$

④

18. 计算 $1.44\div0.09$ 有以下一些方法，说一说这些方法的相同点和不同点。

$1.44\div0.09$
$=(1.44\times100)\div(0.09\times100)$
$=144\div9$
$=16$

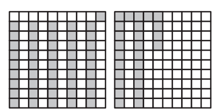
①

1.44元=144分
0.09元=9分
$1.44\div9=16$

②

$$\begin{array}{r} 16 \\ 0.09\overline{)1.44} \\ 9\ \ \\ \hline 54 \\ 54 \\ \hline 0 \end{array}$$

③



0.09是9个0.01，
1.44是144个0.01，
144里有16个9

④

19. 我国古代数学名著《九章算术》记载了分数除法的“经分术”，即“重有分者同而通之”。意思是“两个分数相除，把它们化成同分母分数再分子相除”，即 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\div\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ad}$。请回答以下问题：

（1）这种方法有什么道理？

（2）用这种方法计算整数除法和小数除法是否也可以？

20. 在约分时，有的学生把相同数字去掉，以为就化成最简分数了。例如，将$\frac{18}{84}$分子个位的 8 与分母十位的 8 直接约掉，得到$\frac{1}{4}$。显然，这种做法大多数情况下是错误的，但也不缺乏正确个例。例如，$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$，所得分数与原分数相等，且是最简分数。那么，是否还存在类似的分数，分子分母均为两位数且分子个位数字和分母十位数字相同，去掉这两个相同数字后，原分数被化为最简分数？