出 版 人：所广一
责任编辑：王玉栋
封面设计：

经济数学
JINGJI SHUXUE

定价：28.00元
ISBN 978-7-5041-9836-5
9 787504 198365

经济数学
主编◎王于琴
教育科学出版社
ESPH

经济数学

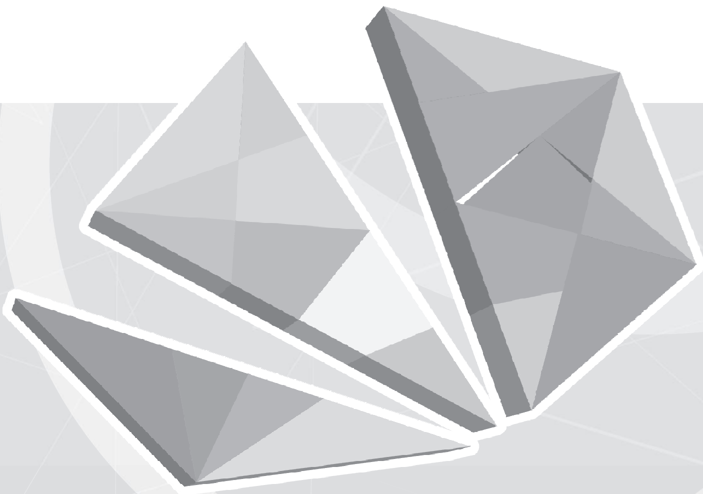
JINGJI SHUXUE

主编◎王于琴

教育科学出版社
ESPH Educational Science Publishing House

经济数学

主　编　王于琴
副主编　王秀焕　游　斌　李增祥　孙　燕
　　　　陈宏达　唐仙芝　颜秀芬



教育科学出版社
·北　京·

出 版 人　所广一
责任编辑　王玉栋
责任校对　贾静芳
责任印制　叶小峰

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/王于琴主编.—北京:教育科学出版社,2015.8（2022.4重印）
ISBN 978-7-5041-9836-5

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①经济数学—高等职业教育—教材　Ⅳ.　①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 180675 号

经济数学
JINGJI SHUXUE

出版发行	教育科学出版社		
社　址	北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号	**市场部电话**	010—64989009
邮　编	100101	**编辑部电话**	010—64981329
传　真	010—64891796	**网　址**	http://www.esph.com.cn
经　销	各地新华书店		
印　刷	北京华创印务有限公司		
开　本	787毫米×1092毫米　1/16	**版　次**	2015 年 8 月第 1 版
印　张	9.5	**印　次**	2022 年 4 月第 2 次印刷
字　数	200 千	**定　价**	28.00 元

前　　言

为落实高等院校培养高素质技能型人才的需要，更好地贯彻教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》（教高〔2006〕16 号）文件，在总结全国高等院校数学课程教学改革经验的基础上，本着“必需、够用、适度”的原则，根据高职高专院校学生身体和智力特点，以及我们长期从事该课程教学工作积累的经验，编写了适应高职高专院校经贸管理类各专业的《经济数学》教材。本书具有以下特点。

1．每一章都设计了“学习目标”“学习重点和难点”，作为学生学习的引导，使学生的学习更具有目的性。

2．以“必需、够用、适度”为原则，根据经贸管理类的各专业对经济数学的要求，淡化理论学习，强化应用，降低了“经济数学”课程的学习难度。

3．例题的编制按照循序渐进的原则，结合生活、专业课学习及社会生产中的实际问题，增加了较多的应用性内容，与后续专业课程的学习紧密结合，特别是增加了许多实用性的例题，注重培养学生分析问题和解决问题的能力，以便更好地为专业学习服务。

4．每章均安排了“本章小结”，以纲要的形式给出了每章的重点内容，帮助学生课后理解和消化。

5．每一章最后都有一篇知识阅读，可以丰富学生的知识面。

6．充分吸收了同类学校的教改成果，对教学更具指导性。

本书融入了教师在教学工作中长期积累的经验和资料，采取更为直观、更易为高职高专学生接受的方式来处理较难的内容，达到深入浅出的效果。一方面对内容保持了系统性，能够讲的都讲了；另一方面对定理只在必要时才给出证明，对那些直观性明显而证明又极其困难的定理，则采取承认的态度，这非常适合高职高专学生的学习。

本书在编写过程中，借鉴和参考了国内外一些专家和学者的研究成果，在此深表谢意！由于编者水平有限，书中如有不足之处敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　极限与连续

（一）学习目标

1. 了解函数概念，熟练掌握基本初等函数的性质及其图形，会建立简单实际问题的函数关系.

2. 理解数列及函数极限的定义.

3. 熟练掌握复合函数的复合过程及求极限的方法.

4. 会比较无穷小量，判断函数的连续性.

（二）学习重点和难点

重点　函数极限的计算及连续性的判断.

难点　分析复合函数结构；掌握两个重要极限；判断分段函数的连续性.

在经济问题的研究过程中，一个经济变量往往与多种因素相关，或者说其中一个量的变化要受到其他一些变化量的制约，这种制约关系就是函数关系，函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中刻画运动变化的量与量之间的依存关系的数学模型，也是微积分学的主要研究对象. 极限又是研究微积分的工具，它作为重要的思想方法始终贯串于经济数学之中.

本章先对中学学过的函数进行复习和补充，并介绍一些经济学中常用的函数，然后，重点研究极限的概念与性质，极限的运算及函数的连续性.

§1.1　函数的概念与性质

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　设 D 是一个数集，如果对属于 D 中的任意 x，按照对应法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之相对应，则称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**，数集 D 为函数的**定义域**，与 x 相对应的 y 值称为函数值，当 x 取 x_0 时，记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，函数值的集合

$$Y=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的**值域**.

例如,生产某种产品的固定成本为 3200 元,每生产一件产品,成本增加 30 元,那么该种产品成本 y 与产量 x 之间的函数关系可表述为:

$$y = 3200 + 30x$$

它的定义域 $D=[0,+\infty)$,值域是$[3200,+\infty)$.

当产量为 50 件时,总成本

$$y\,\big|_{x=50} = 3200 + 30 \times 50 = 4700(\text{元}).$$

例 1 求下列函数的定义域.

(1)$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$ (2)$f(x)=\begin{cases}3x, x\leqslant 0,\\ x^2, x>0.\end{cases}$

解 (1) 要使函数有意义,则必须满足 $x-2\geqslant 0$ 且 $x\neq 4$,故函数的定义域为$[2,4)\cup(4,+\infty)$.

(2) 该函数是分段函数,分段函数的定义域是各段函数定义域的并集,故函数的定义域为全体实数 $\mathbf{R}$.

注意:常见的定义域约束条件如下.

① 分母不能为零;

② 根号开偶次方根,例如 $y=\sqrt{f(x)}$,$f(x)\geqslant 0$;根号开奇次方根,例如 $y=\sqrt[3]{f(x)}$,$f(x)\in\mathbf{R}$;

③ 对数函数的真数必须大于零;

④ 分段函数的定义域为各段函数定义域的并集;

⑤ 若函数式是上述的混合式,则应取各部分定义域的交集.

2. 函数的两要素

函数的两要素是函数的定义域和对应法则. 两个函数,只要它们的定义域和对应法则相同,就是相同的函数,与用什么字母和符号表示自变量和因变量无关.

例如,$y=x^2$ 与 $y=t^2$ 就是相同的函数.

例 2 判断下列函数是否相同:

(1)$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

(2)$y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$

(3)$y=4x$ 与 $y=4u$

解 (1) 不相同,因为对应法则不同;(2) 不相同,因为定义域不同;(3) 相同.

3. 函数的表示法

函数的表示法就是用来确定函数的对应法则的方法. 常见的函数的表示法有三种:解析法、表格法和图表法.

下面分别举一个例子.

例 3　$y = \sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{x}$.

这是用解析法表示的函数关系，它的定义域是

$$D = [-1,0) \cup (0,1].$$

例 4　某商店一年中各月份大米的销售量(单位：10^2kg) 如下表所示：

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	81	84	45	46	89	25	36	55	94	113	144	132

这是用表格法表示的函数关系，它的定义域是

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}.$$

例 5　图 1-1 是某地区一天的气温变化情况. 时间 t 与温度 T 之间的函数关系由图中曲线表示出来.

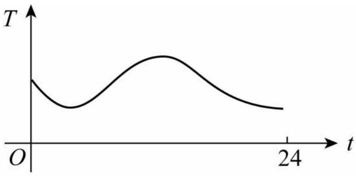


图 1-1

4. 分段函数

有些函数对于不同取值范围的自变量 x，函数采用不同的解析表达式，这种函数叫作**分段函数**.

例 6　已知某快递公司的快件收费标准为：1kg 以内(含 1kg)8 元；超过 1kg，超重部分按每 kg 收取 2 元费用，但总重不超过 10kg. 试列出该快递公司快件的运费与快件的重量之间的函数关系式，写出其定义域，并求出所送快件分别为 1kg，10kg 的甲、乙两位顾客各应支付多少运费？

解　设快件重量为 $x$kg，则快件的运费为：

$$f(x) = \begin{cases} 8, & x \in [0,1] \\ 8+2(x-1), & x \in (1,10] \end{cases}$$

所以，$f(1) = 8$(元)，$f(10) = 8+2(10-1) = 8+18 = 26$(元)

5. 隐函数

有些函数是由自变量的解析式表示出来的，这类函数称为**显函数**，常以 $y = f(x)$ 表示. 如 $y = x^2+1$，$S = \pi r^2$ 等. 而有些函数关系由方程 $F(x,y) = 0$ 确定，如 $x^2+y^2 = 1$，$xy = \sin(x+y)$ 等，这类函数中，x 与 y 的对应关系隐含在方程中，通常称为**隐函数**.

二、函数的性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果对 D 中任意两个数 x_1，x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，总有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)\ [\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)].$$

则称 $f(x)$ 在数集 D 上**单调增加**(或**单调减少**),简称**单增**(或**单减**).若当 $x_1 < x_2$ 时,总有

$$f(x_1) < f(x_2)\ (\text{或}\ f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在数集 D 上**严格单增**(或**严格单减**).

单增和单减的函数统称为**单调函数**,严格单增和严格单减的函数统称为**严格单调函数**.

例如函数 $f(x) = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内是严格单增的,因为对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,有

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

当 $x_1 < x_2$ 时,由于 $x_1 - x_2 < 0$,而

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0,$$

故总有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,即 $f(x_1) < f(x_2)$.

又如函数 $g(x) = x^2$ 在区间$(-\infty, 0]$ 上严格单减,在区间$[0, +\infty)$ 上严格单增,但在整个区间内却不是单调的.这说明函数的单调性亦与数集 D 有关.

2. 奇偶性

设 $y = f(x), x \in D$,其中 D 关于原点对称,即当 $x \in D$ 时有 $-x \in D$.如果对任意 $x \in D$,总有

$$f(-x) = -f(x)\ (\text{或}\ f(-x) = f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**(或**偶函数**).

例如,$f(x) = x^3$ 是奇函数,$g(x) = x^2$ 是偶函数,因为对任意 $x \in \mathbf{R}$,总有

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x),$$

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$$

又如在三角函数中,正弦函数 $y = \sin x$ 是奇函数,余弦函数 $y = \cos x$ 是偶函数,而 $y = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

在坐标平面上,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

3. 周期性

设函数 $y = f(x), x \in D$.若存在常数 $l \neq 0$,使对任意 $x \in D$,总有

$$f(x + l) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function),l 称为 $f(x)$ 的一个周期.显然,若 l 为 $f(x)$ 的一个周期,则 $kl(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 也都是它的周期.所以一个周期函数一定有无穷多个周期.通常所说周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如,三角函数中,$\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数,$\tan x$ 和 $\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间(a, b) 上有定义,如果存在一个正数 M,使得对所有 $x \in (a, b)$,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在(a, b) 内**有界**.如果不存在这样的 M,则称 $f(x)$ 在(a, b) 上**无界**.

注意:

(1) 函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界,是指函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的一段图像被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间,如图 1-2 所示.

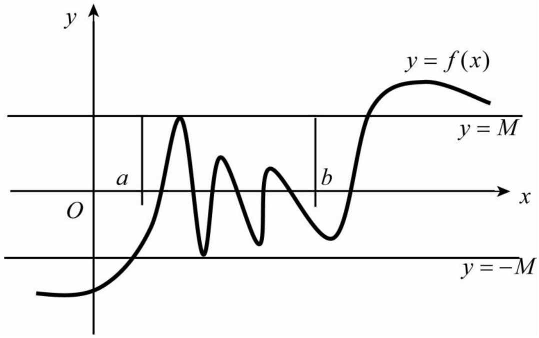


图 1-2

(2) 当函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界时,正数 M 并不唯一. 如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,$|\sin x|\leqslant 1$,但也可取 $M=2$,即 $|\sin x|<2$,事实上,任何大于 1 的数都可取做 M.

(3) 函数的有界性依赖于区间,如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界,但在 $(0,1)$ 内却是无界的.

三、反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 若对 W 中每一个 y 值,存在唯一满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应,则得到一个定义在 W 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数 $x=\varphi(y)$,我们称其为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y),y\in W$$

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**原函数**.

由定义可知,反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是它的原函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 因此也可以说两者互为反函数.

习惯上,我们总是以 x 表示自变量,用 y 表示自变量的函数,所以通常把 $y=f(x)$ 的反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$.

在同一个坐标系中,$y=f(x)$ 的图像与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-3 所示.

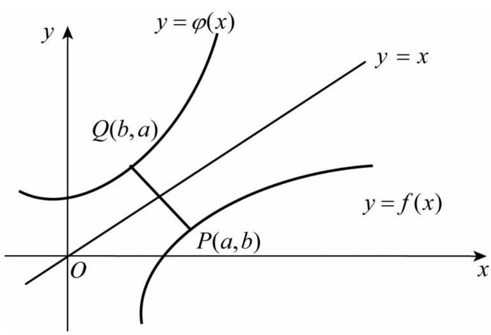


图 1-3

例 7　求 $y=2x-1$ 的反函数.

解　由 $y=2x-1$,得 $x=\dfrac{y+1}{2}$,即所求的反函数为 $y=\dfrac{x+1}{2}$.

四、基本初等函数

微积分学中,我们将常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数称为**基本初等函数**.

1. 常数函数

$$y=c(c\text{ 为常数})$$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,它的图形是一条平行于 x 轴且截距为 c 的直线,如图 1-4 所示.

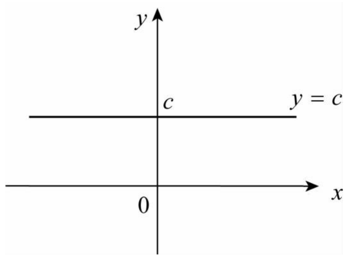


图 1-4

2. 幂函数

$$y=x^{\mu}(\mu\in\mathbf{R},\mu\neq 0)$$

它的定义域,当 μ 是正整数时为$(-\infty,+\infty)$,当 μ 是负整数时为不为零的一切实数. 当 μ 是有理数或无理数时情况比较复杂. 但不论 μ 为何值,幂函数在$(0,+\infty)$内总有定义. 而且它的图形都过点$(1,1)$. 常见的几种幂函数图像如图 1-5 所示.

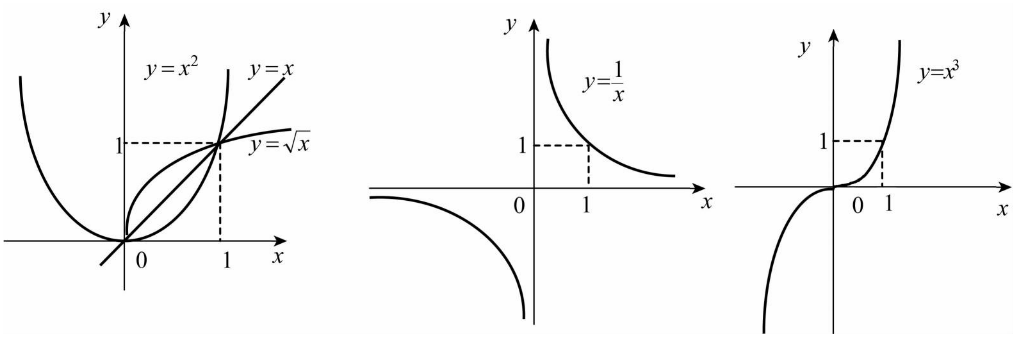


图 1-5

3. 指数函数

$$y=a^{x}(a>0,a\neq 1).$$

定义域为$(-\infty,+\infty)$. 任意 $x\in\mathbf{R}$,总有 $a^{x}>0$,且 $a^{0}=1$,所以指数函数的图形位于 x 轴的上方,且通过点$(0,1)$. 值域为$(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时为严格单增函数;当 $0<a<1$ 时为严格单减函数,如图 1-6 所示. 常用的指数函数是 $y=\mathrm{e}^{x}$,其中 $\mathrm{e}=2.7182818284\cdots$ 为无理数.

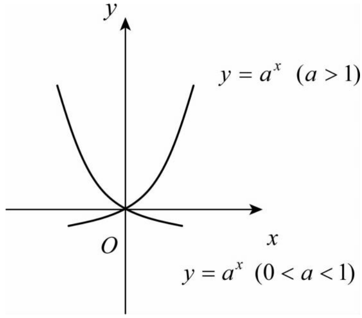


图 1-6

4. 对数函数

$$y=\log_{a}^{x}(a>0,a\neq 1).$$

它是指数函数 $y=a^{x}$ 的反函数,所以它的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时为严格单增函数,当 $0<a<1$ 时为严格单减函数. 它的图形位于 y 轴的右方,且通过点$(1,0)$,如图 1-7

所示.工程数学中常常用到以 e 为底的对数函数 $y=\log_e^x$,称为自然对数,并简记为 $y=\ln x$.

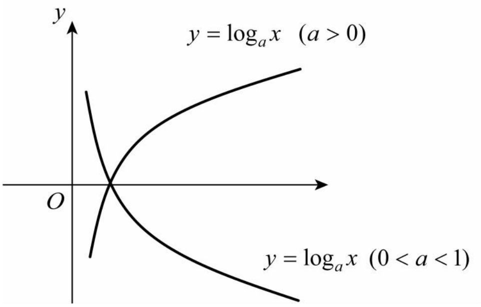


图 1-7

5. 三角函数

正弦函数:$y=\sin x$,定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$[-1,1]$,是奇函数,即 $\sin(-x)=-\sin x$,最小正周期为 2π,是有界函数.图像如图 1-8 所示.

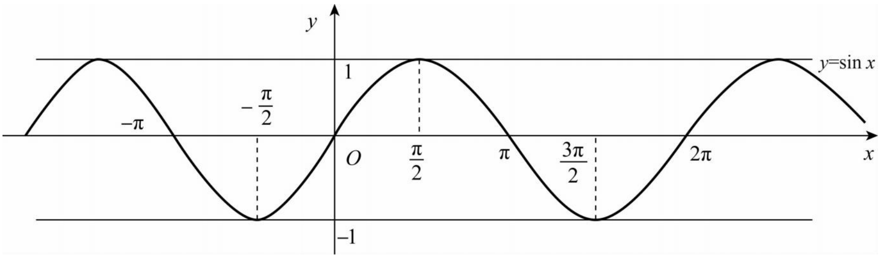


图 1-8

余弦函数:$y=\cos x$,定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$[-1,1]$,是偶函数,即 $\cos(-x)=\cos x$,最小正周期为 2π,是有界函数.图像如图 1-9 所示.

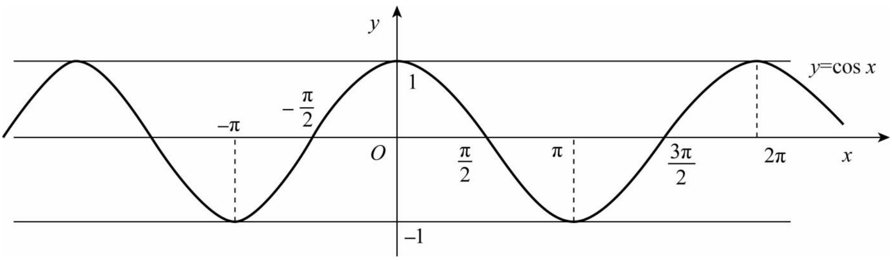


图 1-9

正切函数:$y=\tan x$,定义域 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,值域$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,即 $\tan(-x)=-\tan x$,最小正周期为 π,是无界函数.图像如图 1-10 所示.

余切函数:$y=\cot x$,定义域 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$,值域$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,即 $\cot(-x)=-\cot x$,最小正周期为 π,是无界函数.图像如图 1-11 所示.

此外,正割函数 $y=\sec x$,$\sec x=\frac{1}{\cos x}$,余割函数 $y=\csc x$,$\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

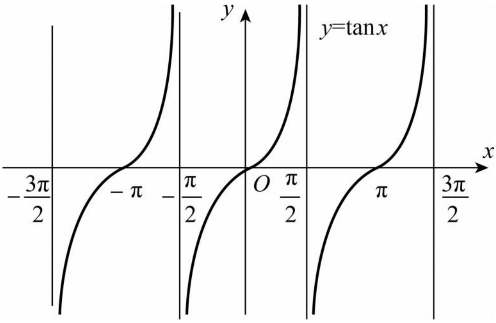


图 1-10

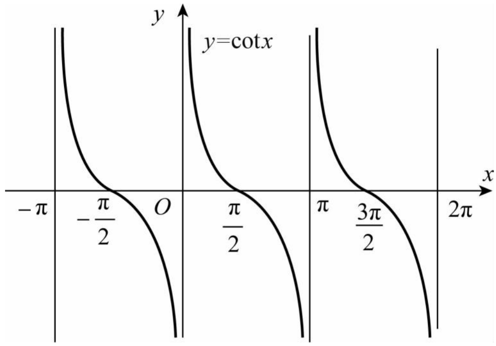


图 1-11

6. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，由于三角函数都是周期函数，我们在各个三角函数中适当选取它们的一个严格单调区间来研究其反函数，常用的反函数有四个：

反正弦函数　　$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

反余弦函数　　$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$；

反正切函数　　$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

反余切函数　　$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$.

它们的图形如图 1-12 所示.

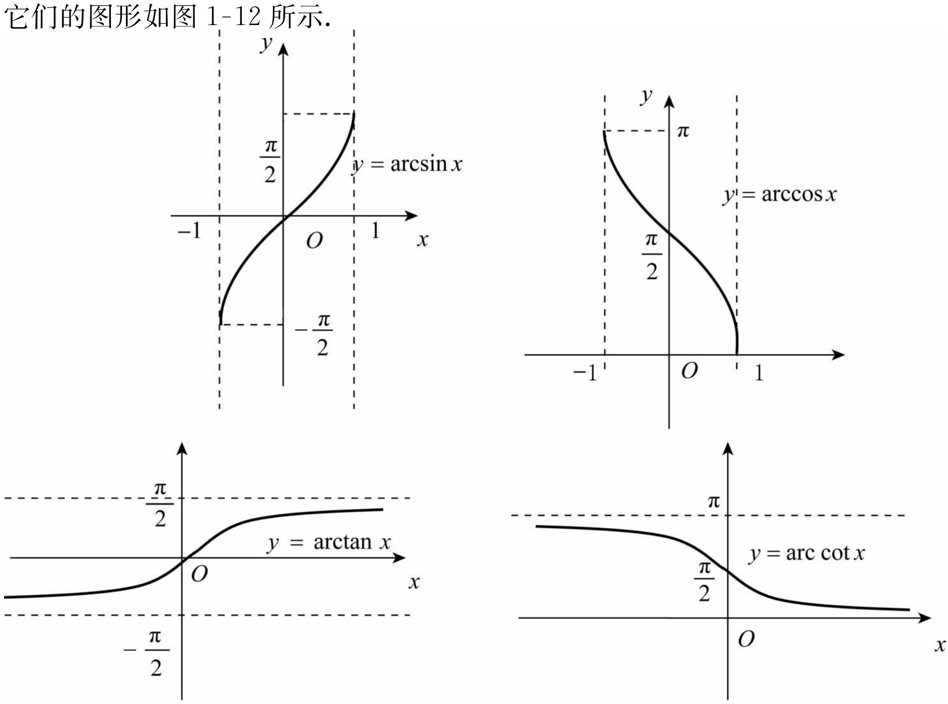


图 1-12

五、复合函数

定义 1.3　设 $y = f(u)$，其中 $u = \varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域全部落在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**，u 称为中**间变量**.

注意：

两个函数复合的过程，其实就是用内函数表达式来代替外函数表达式中的自变量，使之成为复合函数的表达式. 这里涉及外函数、内函数和复合函数，当已知其中某两个函数时，我们可以通过其复合关系求出另一个函数.

例 8　设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, x<0 \\ 1,\ x \geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

解　$f[f(x)] = \begin{cases} 1+f(x), f(x)<0, \\ 1,\ f(x) \geqslant 0, \end{cases}$

易知当 $x<-1$ 时，$f(x) = 1+x<0$，

而 $f[f(x)] = 1+f(x) = 1+(1+x) = 2+x$. 当 $x \geqslant -1$ 时，无论 $-1 \leqslant x < 0$ 及 $x \geqslant 0$. 均有 $f(x) \geqslant 0$，从而 $f[f(x)] = 1$. 所以

$$f[f(x)] = \begin{cases} 2+x, x<-1 \\ 1,\ x \geqslant -1 \end{cases}.$$

例 9　分析下列复合函数的结构：

(1) $y = \sin^3 x$；　　(2) $y = e^{\tan\frac{x}{2}}$.

解　(1) $y = u^3, u = \sin x$.

(2) $y = e^u, u = \tan v, v = \dfrac{x}{2}$.

六、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合步骤构成，且用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

例如函数

$$y = \sqrt{1+x^2}, y = 3\sin(2x+\frac{2}{3}\pi), y = x2^{\sin x} - \frac{1}{x} - \log_2(1+2x^2)$$

都是初等函数.

根据定义可知，分段函数不是初等函数.

习　　题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x-2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}+\arcsin(x-3)$；　　(4) $y=\sin\sqrt{x}$.

2. 判断下列各组中两个函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=3\lg x, g(x)=\lg x^3$；

(2) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\sin x\cos x^2$；　　(2) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；　　(4) $y=\sin x+\cos x$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos x^2$；　　(2) $y=\ln\ln\sin x$；

(3) $y=(2-4x)^2$；　　(4) $y=\sin^2(x+1)$；

(5) $y=\sqrt{e^{\sin x}}$；　　(6) $y=\ln(1+x^2)$.

§1.2　常用的经济函数

为解决实际应用问题,首先要将该问题量化,从而建立起该问题的数学模型,即建立函数关系,本节介绍几个常见的经济函数.

一、需求函数

一种商品的需求量 Q 与该种商品的价格 p 密切相关,如果不考虑其他因素的影响,则商品的需求量 Q 可看作价格 p 的函数,称为**需求函数**,记作 $Q=f(p)$.

一般地需求量随价格的上升而减少. 因此,需求函数 $Q=f(p)$ 是价格 p 的单调减少函数.

常见的需求函数有以下几种类型:

(1) 线性需求函数:$Q=a-bp\ (a>0,b>0)$,

(2) 二次需求函数:$Q=a-bp-cp^2\ (a>0,b>0,c>0)$,

(3) 指数需求函数:$Q=ae^{-bp}\ (a>0,b>0)$.

例 1　书店售书,当该书售价为 18 元 / 本时,每天销售量为 100 本,售价每提高 0.1 元,销售量则减少 5 本,试求需求函数.

解　设需求量为 Q，该书售价为 p 元/本，由题意：

$$Q = 100 - \frac{p-18}{0.1} \times 5,$$

即 $Q = 50(20-p)$.

由此可以看出，需求函数是单调减少函数，且该书的售价不能超过 20 元/本，否则就没有销路.

二、供给函数

"供给量"是在一定价格水平下，生产者愿意出售并且有可供出售的商品量，如果不考虑价格以外的其他因素，则商品的供给量 Q 是价格 p 的函数：$Q = g(p)$，称为**供给函数**.

一般地，供给量随价格的上升而增大，因此，供给函数 $Q = g(p)$ 是价格 p 的单调增加函数.

常见的供给函数有线性函数、二次函数、指数函数等. 其中，线性供给函数为 $Q = -c + dp\ (c > 0, d > 0)$.

如果市场上某种商品的需求量与供给量相等，则该商品市场处于平衡状态，这时的商品价格 p_0 称为市场平衡价格.

当市场价格 $p > p_0$ 时，供应量将增加而需求量减少，这时产生的"供大于求"的状态会使商品的价格下降；当市场价格 $p < p_0$ 时，供应量减少而需求量增加，这时出现的"物资短缺"现象会使价格上升，市场价格的调节就是这样实现的.

例 2　设某本书的价格为 18 元/本时，书商可每天提供 100 本，价格每增加 0.1 元，书商可多提供 5 本书，试求供给函数.

解　设该书售价为 p 元/本，供给量为 Q，由题意

$$Q = 100 + \frac{p-18}{0.1} \times 5,$$

即 $Q = 50(p-16)$.

由此可知，供给函数是单调增加函数，当价格上涨时，书商提供的书的数量会增加.

例 3　由例 1、例 2 求该书的市场平衡价格 p_0.

解　由 $\begin{cases} Q = 50(20-p), \\ Q = 50(p-16), \end{cases}$

得 $p_0 = 18$.

由此可知，该书的市场平衡价格为 18 元/本，高于这个价格，供过于求；低于这个价格，供不应求.

三、成本函数

总成本是企业生产一种产品所需费用的总和，它通常分为固定成本 C_0 和可变成本

$C_1(Q)$ 两部分，即

$$C = C(Q) = C_0 + C_1(Q).$$

固定成本指不受产量变化影响的成本，如厂房、机器设备的费用等. 可变成本指随产量变化而发生变化的成本，如原材料费、工人工资、包装费等.

在经济分析中，常用到**平均成本** $\bar{C}(Q)$，

$$\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_0}{Q} + \frac{C_1(Q)}{Q},$$

其中$\frac{C_1(Q)}{Q}$ 称为**平均可变成本**.

例 4 生产某种商品的总成本是 $C(Q) = 500 + 4Q$，求生产 50 件这种商品时的总成本和平均成本.

解 生产 50 件这种商品时的总成本为：$C(50) = 500 + 4 \times 50 = 700$(元)；

平均成本为：$\bar{C}(50) = \frac{C(50)}{50} = \frac{700}{50} = 14$(元 / 件).

四、收入函数

收入是销售价格和销售量的乘积. 若价格为 p，销售量为 Q，总收入为 R，则有

$$R = R(Q) = pQ.$$

例 5 某商品的价格函数是 $p = 50 - \frac{1}{5}Q$，求该商品的收入函数，并求销售 10 件商品的总收入.

解 该商品的收入函数为 $R = R(Q) = pQ = (50 - \frac{1}{5}Q) \cdot Q = 50Q - \frac{1}{5}Q^2$，

销售 10 件商品的总收入为 $R(10) = 50 \times 10 - \frac{1}{5} \times 10^2 = 480$.

五、利润函数

利润是收入与成本的差，用 L 表示，

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

一般地

(1) 如果 $L(Q) = R(Q) - C(Q) > 0$，则生产处于盈利状态.

(2) 如果 $L(Q) = R(Q) - C(Q) < 0$，则生产处于亏本状态.

(3) 如果 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = 0$，则生产处于保本状态.

例 6 某商品的成本函数为 $C(Q) = 12 + 3Q + Q^2$，若销售单价定为 11 元 / 件，试求：

(1) 商品的利润函数；

(2) 商品经营活动的无亏盈点；

(3) 生产 5 件该商品的总利润；

(4) 若每天销售 10 件商品，为了不亏本，销售单价应定为多少才合适？

解　(1) 利润函数为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=11Q-(12+3Q+Q^2)=8Q-12-Q^2$.

(2) 令 $L(Q)=0$，解得两个无亏盈点 $Q_1=2$ 和 $Q_2=6$.

由 $L(Q)=8Q-12-Q^2=-(Q-2)(Q-6)$ 可以看出，当 $Q<2$ 或 $Q>6$ 时，都有 $L(Q)<0$，这时生产经营是亏损的；

当 $2<Q<6$ 时，$L(Q)>0$，因此，$Q_1=2$ 和 $Q_2=6$ 分别是盈利的最低产量和最高产量.

(3) 生产 5 件该商品的总利润为 $L(5)=8\times5-12-5^2=3$(元).

(4) 设定价为 p 元 / 件，则利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=pQ-(12+3Q+Q^2)$，为了不亏本，须有 $L(10)\geqslant0$，即 $10p-(12+3\times10+10^2)\geqslant0$，也就是 $p\geqslant14.2$.

因此，为了不亏本，销售单价应不低于 14.2 元 / 件.

习　　题 1.2

1. 当鸡蛋的收购价为 5 元 /kg 时，某收购站每月能收购 5 000kg 鸡蛋，若收购价提高 0.1 元 /kg，则收购可增加 400kg，求鸡蛋的供给函数.

2. 某手表的价格为 70 元 / 只时，销售量是 10 000 只，若单价每提高 3 元，则需求量减少 3 000 只，求该手表的需求函数.

3. 某工厂生产某种产品，固定成本为 2 000 元，每生产一件产品，成本增加 5 元，若该产品销售单价为 9 元 / 台，试求利润函数和产量为 200 台时的平均成本.

4. 某服装厂生产衬衫的可变成本是每件 15 元，固定成本是 2 000 元，若每件衬衫售价是 20 元，则该厂每天生产 600 件衬衫的利润是多少?无盈亏产量是多少？

§1.3　极限的概念

一、数列的极限

1. 数列的概念

数列是按照一定的次序排列起来的一列数

$$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$$

简记为 $\{u_n\}$，u_n 称为数列的**通项**或**一般项**.

2. 数列的极限

定义 1.4　对于数列 $\{u_n\}$，如果当 n 无限增大时，通项 u_n 无限接近于一常数 A，则称 A 为数列 $\{u_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}u_n = A \text{ 或 } u_n \to A(n\to\infty).$$

极限存在,则称数列$\{u_n\}$ **收敛**;否则,称数列$\{u_n\}$ **发散**.

例 1 求下列数列的极限,并判断数列的敛散性.

(1)$\{u_n\}=\dfrac{1}{n}$;(2)$\{u_n\}=(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$;(3)$\{u_n\}=n$.

解 (1) 极限为 0,数列收敛;

(2) 极限为 0,数列收敛;

(3) 极限不存在,数列发散.

定理 1.1 单调有界数列必有极限.

二、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.5 如果当$|x|$无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A,则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2. 当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.6 如果$x>0$,当x无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A,则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

3. 当 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.7 如果$x<0$,当x无限减小时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A,则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

例如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

4. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

我们先介绍邻域和去心邻域的概念.

邻域:开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为以 x_0 为中心,以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的邻域,记作$U(x_0,\delta)$.

去心邻域:$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为以 x_0 为中心,以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的去心邻域,记作 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$.

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域$U(x_0,\delta)$内有定义,当x无限接近x_0时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A,则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

例如$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4.$

5. 当 $x \to x_0^{\ +}$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.9　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一右半邻域$(x_0, x_0 + \delta)$内有定义，当 x 从 x_0 右侧无限接近 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^{\ +}$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0^{\ +}).$$

6. 当 $x \to x_0^{\ -}$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.10　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一左半邻域$(x_0 - \delta, x_0)$内有定义，当 x 从 x_0 左侧无限接近 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^{\ -}$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0^{\ -}).$$

定理 1.2　极限存在的充要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

例 2　设 $f(x) = \begin{cases} x + 1, x < 0 \\ x, 0 \leqslant x < 1 \\ 2 - x, x \geqslant 1 \end{cases}$，讨论$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 是否存在？

解　$\lim\limits_{x \to 0^-}(x + 1) = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$，

$\lim\limits_{x \to 1^-} x = \lim\limits_{x \to 1^+}(2 - x) = 1.$

因为 $\lim\limits_{x \to 0^-}(x + 1) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} x$，所以由定理推知 $f(x)$ 当 $x \to 0$ 时极限不存在；又因为 $\lim\limits_{x \to 1^-} x = \lim\limits_{x \to 1^+}(2 - x) = 1$，故由定理知 $f(x)$ 当 $x \to 1$ 时极限为 1.

三、极限的性质

性质 1（唯一性）　若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则它是唯一的.

性质 2（局部有界性）　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，使得 $|f(x)| \leqslant M$.

性质 3（局部保号性）　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$（或 < 0），则对任意正数 $r(0 < r < |A|)$，存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，使对一切 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，总有 $f(x) > r > 0$（或 $f(x) < -r < 0$）.

性质 4（夹逼定理）　若在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

习　　题 1.3

1. 用图像法判断下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2^x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to -\infty}3^x$；　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arccot}x$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1,\\ 2, & x=1,\\ 3x^3, & 1<x<3,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

§1.4　无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1.11　在自变量的某个变化过程中，极限为零的变量称为**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时都以零为极限，所以它们都是无穷小量或称为**无穷小数列**. 又如函数 $1-x^2$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小，函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

可见，除了数列只有 $n\to\infty$ 一种类型，对于定义在区间上的函数而言，单说此函数是无穷小是不够的，还必须指明自变量 x 的趋向，它包括 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^{+}$ 及 $x\to x_0^{-}$ 六种类型.

注意：

(1) 无穷小量是变量，不是很小的数，数字 0 除外；

(2) 无穷小量是针对自变量的某一变化趋势而言的.

1. 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍然是一个无穷小；

(2) 有限个无穷小的乘积仍然是一个无穷小；

(3) 无穷小与有界量(函数)的乘积是无穷小.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限.

解　因为当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，且对一切 $x\neq 0$ 总有 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有

界函数，所以 $x\sin\frac{1}{x}$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小，即

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

2. 无穷小量的比较

我们已经知道，两个无穷小的和、差及乘积仍然是无穷小，但两个无穷小的商却会出现不同的情况. 例如 $x,2x,x^2$ 都是当 $x\to 0$ 时的无穷小，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$，比的极限不同，这反映了不同的无穷小趋于零的速度的差异. 为了说明无穷小趋于零的速度的快慢程度，我们引入无穷小量的阶的概念.

定义 1.12 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小**；

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**等价无穷小**，记作 $\alpha\sim\beta$；

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小**，记作 $\alpha=o(\beta)$；

(4) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**低阶无穷小**.

由定义可知，在 $x\to 0$ 时，x 与 $2x$ 是同阶无穷小；x^2 是比 $2x$ 高阶的无穷小；$2x$ 是比 x^2 低阶的无穷小.

定理 1.3(等价无穷小的替换定理)

设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\alpha'}$$

注意：当 $x\to 0$ 时，常见的等价无穷小替换公式：

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{x}{n}$.

例 2 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arctan x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$； (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 (1) 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x\sim 2x$，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$；

(2) 当 $x\to 0$ 时，$\tan 3x\sim 3x$，$\arcsin 2x\sim 2x$，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$；

(3) 当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+2x) \sim 2x$，$\arcsin x \sim x$，原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x} = 2$；

(4) 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$；

(5) 当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

二、无穷大量

定义 1.13 在自变量的某个变化过程中，如果 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为这一变化过程中的**无穷大量**，简称**无穷大**.

例如，函数 $y = \dfrac{1}{x}$，$y = \dfrac{1}{\sin x}$ 是在 $x \to 0$ 时的无穷大量. 又如函数 $y = x^2$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷大.

注意：

(1) 无穷大是变量，不是很大的数；

(2) 无穷大量是针对自变量的某一变化趋势而言的；

(3)"极限为 ∞"说明极限不存在.

三、无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小时，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

习　　题 1.4

1. 指出下列各题中，哪些是无穷小，哪些是无穷大.

(1) $\dfrac{1+x}{\sin x}(x \to 0)$；　　(2) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n (n \to \infty)$；

(3) $e^{-x}(x \to +\infty)$；　　(4) $\dfrac{x+1}{x^2-4}(x \to 2)$.

2. 利用无穷小的性质，求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x}$；　　(3) $\lim\limits_{x \to 0} x\arctan\dfrac{1}{x}$.

3. 比较下列无穷小的阶.

(1)x^3 与 $x(x\to 0)$；(2) $\dfrac{1}{x}$ 与$\dfrac{1}{x^2}(x\to\infty)$；(3)$x$ 与 $x\cos x(x\to 0)$.

4. 利用无穷小等价替换原理，求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\arctan x}$.

§1.5　极限运算法则

极限定义为我们提供了一种求极限的方法，但这种方法使用起来很不方便，并且在大多数情形下也是不可行的. 这一节我们将给出极限的若干运算法则，应用这些法则将帮助我们比较方便地进行有关极限的计算.

一、极限的四则运算法则

定理 1.4　若极限$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$与$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$皆存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$；

推论 1　$\lim\limits_{x\to\Delta}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$($C$ 为常数)；

推论 2　$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\right]^n(n>0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)}{\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)}(\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)\neq 0)$.

例 1　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}$.

解　因为$\dfrac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}=\frac{1-0+0}{2+0-0}=\frac{1}{2}.$$

例 2　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-3\cos x+\sin x+4)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}(x^3-3\cos x+\sin x+4)=\lim\limits_{x\to0}x^3-3\lim\limits_{x\to0}\cos x+\lim\limits_{x\to0}\sin x+\lim\limits_{x\to0}4$

$=0-3\times1+0+4=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left(1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right)=1\times2=2.$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)}=-1.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$

二、两个重要的极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$

注意:

该重要极限在极限计算中有重要作用,它在形式上有以下特点:

(1) 它是$\frac{0}{0}$型未定式;

(2) 它可以写成$\lim\limits_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$($\square$代表同样的变量或同样的表达式);

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1.$

例 3 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{2x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin7x}$;　(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin5x}{5x}\right]=\frac{5}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=\frac{5}{2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin7x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{3}{7}\cdot\frac{7x}{3x}\cdot\frac{\sin3x}{\sin7x}\right]=\frac{3}{7}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{7x}{\sin7x}=\frac{3}{7}.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ **或** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

注意：

（1）它是 1^{∞} 型未定式；

（2）它可以写成 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$.

例 4　求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$；　（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+n}{x-n}\right)^{x}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{-x}(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+n}{x-n}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-n}{2n}}\right)^{\frac{x-n}{2n}}\right]^{2n}\left(1+\dfrac{2n}{x-n}\right)^{n}=\mathrm{e}^{2n}\cdot 1=\mathrm{e}^{2n}$.

三、经济模型

1. 复利与贴现问题

利息指的是借款者向贷款者支付的报酬，它是根据本金的数额按一定比例计算出来的，利息有存款利息、贷款利息、债券利息、贴现利息等几种主要形式.

复利计算公式：

设初始本金为 A_0，利率为 r，则

第一个计息期末的本利和为 $A_1=A_0+A_0r=A_0(1+r)$

第二个计息期末的本利和为 $A_2=A_0(1+r)+A_0(1+r)r=A_0(1+r)^2$

…　…　…　…　…　…

第 n 个计息期末的本利和为 $A_n=A_0(1+r)^n$　　(5-1)

若每期结算 m 次，则此时每期的利率可认为是$\dfrac{r}{m}$，容易推出 t 期末的本利和为

$$A_n=A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}\tag{5-2}$$

若每期的计算次数 $m\to\infty$（即每时每刻结算）时，

t 期末的本利和为 $A_n=\lim\limits_{m\to\infty}A_0\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{mt}$，即

$$A_n=A_0\mathrm{e}^{rt}\tag{5-3}$$

公式(5-1)、(5-2)称为**离散复利公式**，公式(5-3)称为**连续复利公式**. 其中 A_0 称为**现值**（或**初值**），A 称为**终值**（或**未来值**）.

例 5　现将 100 元现金存入银行，年利率为 1.98%，试求 10 年末的本利和（不扣利息税）.

解 用离散复利公式计算 10 年末的本利和为

$$A = 100\,(1+0.0198)^{10} = 122.66(\text{元})$$

用连续复利公式计算 10 年末的本利和为

$$A = 100\mathrm{e}^{0.0198\times 10} = 121.90(\text{元})$$

例 6 设年投资收益率 9%，按连续复利计算，现投资多少元，10 年末可达 200 万元？

解 已知 $A=200, r=0.09, t=10$ 代入公式 $A=A_0\mathrm{e}^{rt}$，得

$$A_0 = 200\mathrm{e}^{-0.9} \approx 121.90(\text{万元}).$$

2. 融资问题

设企业投资本金为A，贷款额占抵押品价值的百分比为$r(0<r<1)$，第n次投资或再投资(贷款) 额为 a_n，n 次投资与再投资的资金总和为 S_n，投资与再投资的资金总和为 S.

建立模型：

$a_1 = A$

$a_2 = Ar$

$a_3 = Ar^2$

… … … … … …

$a_n = Ar^{n-1}$

则 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$= A + Ar + Ar^2 + \cdots + Ar^{n-1}$

$= \dfrac{A(1-r^n)}{1-r}$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{A(1-r^n)}{1-r} = \frac{A}{1-r}\left(\because \lim_{n\to\infty} r^n = 0\right).$$

例 7 某企业或投资 50 万元，该企业将投资作为抵押品向银行贷款，得到相当于抵押品价值的 0.75 的贷款，该企业将此贷款再进行投资，并将再投资作为抵押品又向银行贷款，仍得到相当于抵押品价值的 0.75 的贷款，企业又将此贷款再进行投资，这样贷款 — 投 资 — 再贷款 — 再投资，如此反复进行扩大再生产. 问该企业共计可获投资多少万元？

解 $A = 50$(万元)，$r = 0.75$ 代入

$$S = \frac{A}{1-r} = \frac{50}{1-0.75} = 200(\text{万元}).$$

习　　题 1.5

1. 根据极限的四则运算法则求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-3x+5)$； (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2}$； (3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{5x^3-x+5}$； (5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$； (6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

2. 利用两个重要的极限公式求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 5x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$；

(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；　(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$.

3. 现将 2000 元本金存入银行，银行的储蓄年利率为 4%，试求 3 年末的本利和(不扣利息税).

§1.6　函数的连续性

自然界中的许多现象都是连续变化着的，如河水的连续流动、身高的连续增长、气温的变化、植物的生长等. 就气温的变化来看，时间变动微小时，气温的变化也是微小的，这种特点就是所谓的连续性. 连续性是自然界中各种物态连续变化的数学体现. 下面我们先引入增量的概念，然后用增量来描述连续性，并介绍函数的连续性的定义.

一、函数的连续性

1. 函数的增量

定义 1.14　设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由初值 x_0 变到终值 x_1 时，差 x_1-x_0 称为**自变量 x 的增量**，记作 Δx，即 $\Delta x=x_1-x_0$.

相应地，函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，差 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 称为**函数 $f(x)$ 的增量**，记作 Δy，即 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

注意：Δx 和 Δy 可以是正值也可以是负值.

2. 函数的连续性

定义 1.15　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \text{ 或 } \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

由于 Δy 也可写成 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，所以上述定义也可表述为如下定义.

定义 1.16　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 连续.

注意：函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，必须同时满足以下三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

定义 1.17 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一左半邻域内有定义，若

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 左连续；设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一右半邻域内有定义，若

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 右连续.

定理 1.5 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

例 1 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 的连续性.

解 因为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1,$$

而 $f(0) = -1$，所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 左连续，但不右连续，从而它在 $x = 0$ 不连续.

二、函数的间断点及其分类

定义 1.18 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，且在 x_0 不连续，则称 $f(x)$ 在 x_0 **间断**或**不连续**，并称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**或**不连续点**.

若 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，则有且仅有下列三种情况之一：

(1) $f(x)$ 在 x_0 无定义；

(2) $f(x)$ 在 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) $f(x)$ 在 x_0 有定义且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

间断点按下述情形分类：

① 可去间断点.

若 $f(x)$ 在 x_0 有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x_0) \text{ 不存在}),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**.

② 跳跃间断点.

若 $f(x)$ 在 x_0 存在左、右极限，但

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点**.

③ 第二类间断点.

若 $f(x)$ 在 x_0 至少有一侧的极限值不存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

由此可见，凡不是函数的第一类间断点的所有间断点都是该函数的第二类间断点.

例 2　考察函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 与 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，可知 $x=0$ 是它们共同的可去间断点（第一类间断点）. 为了去掉它们在 $x=0$ 的间断性，可以对 $f(x)$ 补充定义，对 $g(x)$ 修改定义，使 $f(0)=g(0)=1$，则所得到的新函数

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1,\quad x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续. 这也是对可去间断点称谓的一种解释.

例 3　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, x<0\\ 0,\ x=0\\ x+1, x>0\end{cases}\text{ 在点 } x=0 \text{ 处的连续性.}$$

解　在 $x=0$ 有 $f(0-0)=-1, f(0+0)=1, f(0)=0$.

可见 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 4　观察函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 与 $\psi(x)=\sin\dfrac{1}{x}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 皆以 $x=0$ 为第二类间断点. 考虑到 $x\to 0$ 时 $\varphi(x)$ 为无穷大量，而 $\psi(x)$ 的函数值在 ± 1 之间无限次地变动，因此更细致地说，$x=0$ 分别是 $\varphi(x)$ 的**无穷间断点**和 $\psi(x)$ 的**振荡间断点**.

三、初等函数的连续性

1. 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内是连续的，一切初等函数在其定义域内也是连续的.

由此可知，求初等函数的连续区间就是求函数的定义域. 关于分段函数的连续性，除考虑每段函数的连续性外，还必须讨论分段点处的连续性.

2. 复合函数的连续性

定理 1.6　设有复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而函数 $f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a).$$

例 5　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x)=\ln 1=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$ $\ln e=1.$

四、闭区间上连续函数的性质

本节将研究闭区间上连续函数的几个重要的基本性质，并从几何直观上对它们加以解释而略去证明.

定理 1.7 (最大值最小值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有最大值和最小值.

这就是说，在$[a,b]$上至少存在 x_1 及 x_2，使对一切 $x\in[a,b]$ 都有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2),$$

即 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值和最大值(图 1-13).

推论(有界性定理) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

定理 1.8(介值定理) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数 c，在(a,b)内必至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=c$.

这就是说，对任何实数 c：$f(a)<c<f(b)$ 或 $f(b)<c<f(a)$，定义于(a,b)内的连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=c$ 必至少相交于一点(ξ,c)(图 1-14).

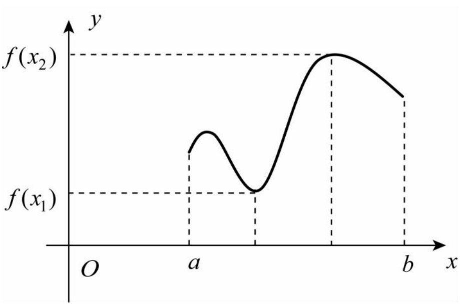


图 1-13

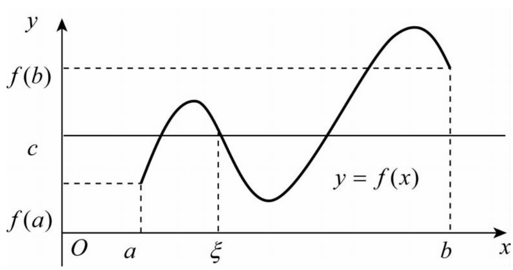


图 1-14

定理 1.9(根的存在性定理/零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

例 6 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

证 设 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且

$f(0)=1>0, f(1)=-2<0,$

由根的存在性定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，

这说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

方程 $f(x)=0$ 的根也称为函数 $f(x)$ 的零点，所以通常也把根的存在性定理称为**零点定理.**

习　　题 1.6

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x<0, \\ a+x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 问 a 为何值时函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

2. 求下列函数的间断点,并指出间断点的类型.

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 2, & x=0; \end{cases}$　　(2) $f(x)=\dfrac{1-x^{2}}{x(x-2)}$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

本 章 小 结

一、本章主要内容

函数概念;基本初等函数;复合函数;常见的经济函数;数列及函数极限的概念;无穷小与无穷大;极限的运算法则;函数的连续;闭区间上连续函数的性质.

二、复合函数的分解

遵循由外到内的原则,分解方法要求能够熟练应用,这是学习后续课程复合函数导数的基础.

三、极限的运算方法

1. 直接代入法,将自变量的趋向值直接代入函数式中,所得的函数值就是极限值.

2. 利用四则运算法则求极限,即极限的加减乘除运算法则.

“$\dfrac{0}{0}$”型、“$0\cdot\infty$”型、“$\infty-\infty$”型等的计算方法:分解因式、消去同为零的因子、分子(分母)有理化等.

3. 无穷小性质及等价无穷小的运用.

4. 利用两个重要的极限求极限.

四、函数连续的充要条件是左极限等于右极限(或左连续等于右连续)

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

五、函数间断点的分类情况

$$\text{间断点分类}\begin{cases}\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{可去间断点}\\\text{跳跃间断点}\end{cases}\\\text{第二类间断点}\begin{cases}\text{无穷间断点}\\\text{震荡间断点}\end{cases}\end{cases}$$

复习题一

1. 选择题.

(1) 函数 $y=\sin x+1$ 的周期为(　　).

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. 2π　　D. $\frac{\pi}{3}$

(2) 下列关于 x_0 点处极限存在的表述正确的是(　　).

A. $f(x_0)=A$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

C. $f(x)$ 在点 x_0 有定义　　D. $f(x)$ 在点 x_0 连续

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 等于(　　).

A. 0　　B. $\frac{2}{7}$　　C. 1　　D. $\frac{7}{2}$

(4) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,则 $a=$(　　).

A. 1　　B. ∞　　C. ln3　　D. 2ln3

(5) 极限:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{x^3}=$(　　).

A. 1　　B. ∞　　C. 0　　D. 2

2. 填空题.

(1) 如图 1-15,绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x,x>0;\\0,x=0;\\-x,x<0.\end{cases}$$

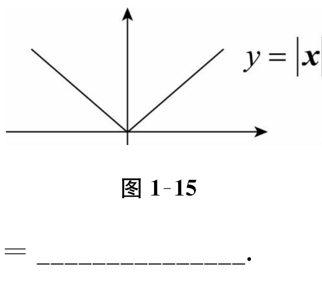


图 1-15

其定义域是__________,值域是__________.

(2) 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=$__________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\arctan x}=$__________.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=$__________.

(5) 若函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$,则它的间断点是 ________________.

3. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}+\lg(5-2x)$ 的定义域.

4. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-5n+1}{6n^2-4n-7}$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{\tan 2x(x^2+3x)}$.

7. 研究函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq0,\\ 1, x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 时是否连续?

8. 指出下列函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq0,\\ 0, x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 点是否间断,如果间断,指出是哪类间断点?

9. 某厂生产产品 $1000t$,定价为 130 元 $/t$,当售出量不超出 $700t$ 时,按原定价出售,超过 $700t$ 的部分按原价的九折销售,试将销售收入表示成销售量的函数.

10. 证明方程 $f(x)=2x^3-3x^2+2x-3=0$ 在区间 $[1,2]$ 内至少有一根.

知识阅读(一)

数学家刘徽

刘徽(约 225—295),汉族,山东邹平县人,魏晋时期的数学家,中国古典数学理论的奠基者之一,是中国数学史上一个非常伟大的数学家.他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》,是中国最宝贵的数学遗产.刘徽思维敏捷,方法灵活,既提倡推理又主张直观.他是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人.刘徽的一生是为数学刻苦探求的一生.他虽然地位低下,但人格高尚.他不是沽名钓誉的庸人,而是学而不厌的伟人,他给我们中华民族留下了宝贵的财富.

他的主要著作有《九章算术注》10 卷;《重差》1 卷,至唐代易名为《海岛算经》;《九章重差图》1 卷.可惜后两种都在宋代失传.《九章算术》约成书于东汉之初,共有 246 个问题的解法。在许多方面,如解联立方程,分数四则运算,正负数运算,几何图形的体积面积计算等,都属于世界先进之列.

刘徽在数学上的贡献极多，在开方不尽的问题中提出“求徽数”的思想，这方法与后来求无理根的近似值的方法一致，它不仅是圆周率精确计算的必要条件，而且促进了十进小数的产生；在线性方程组解法中，他创造了比直除法更简便的互乘相消法，与现今解法基本一致；刘徽还提出了许多公认正确的判断作为证明的前提．他的大多数推理、证明都合乎逻辑，十分严谨，从而把《九章算术》及他自己提出的解法、公式建立在必然性的基础之上．虽然刘徽没有写出自成体系的著作，但他注《九章算术》所运用的数学知识，实际上已经形成了一个独具特色、包括概念和判断并以数学证明为其联系纽带的理论体系．

刘徽在割圆术中提出的“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”，这可视为中国古代极限观念的佳作．《海岛算经》一书中，刘徽精心选编了九个测量问题，这些题目的创造性、复杂性和富有代表性，在当时都为西方所瞩目．

第二章　导数与微分

(一) 学习目标

1. 了解导数的概念，了解微分的概念.
2. 熟练掌握初等函数导数与微分的计算方法.

(二) 学习重点和难点

重点　导数和微分的计算.
难点　导数和微分的概念.

§2.1　导数的概念

一、导数及其基本概念

1. 函数在 $x = x_0$ 点处的导数

定义 2.1　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 由 x_0 变化到 $x_0 + \Delta x$，如果当 $\Delta x \to 0$ 时，相应函数的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限存在，即$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

也可记为 $y' \big|_{x = x_0}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \big|_{x = x_0}$，$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \big|_{x = x_0}$.

2. 单侧导数

(1) 左导数

定义 2.2　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的左半邻域$(x_0 - \delta, x_0]$$(\delta > 0)$内有定义，当自变量由 x_0 变化到 $x_0 + \Delta x$（$x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内，且 $\Delta x \neq 0$）时，则函数的改变量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的**左导数**,记作 $f'_-(x_0)$,即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \text{或 } f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(2) 右导数

定义 2.3 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的右半邻域$[x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内有定义,当自变量由 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ ($x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内,且 $\Delta x\neq 0$) 时,则函数的改变量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的**右导数**,记作 $f'_+(x_0)$,即

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \text{或 } f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

3. 导函数

定义 2.4 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点 x 处都可导,即对于任意一点 $x\in I$,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

都存在,则 $f'(x)$ 是一个关于 x 的函数,我们称 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数(简称导数).也可记为 y',$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

例 1 求函数 $f(x)=C$(C 为常数) 的导数.

解 因为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$,

所以 $(C)'=0$.

这就是常值函数的导数公式,利用该公式可以求出具体的常值函数的导数.

例如 $(1)'=0$,$\left(-\frac{\pi}{2}\right)'=0$,$(\ln 3)'=0$ 等.

例 2 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解
$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.
\end{aligned}$$

即 $$(\sin x)' = \cos x.$$

这就是正弦函数的导数公式.

例 3　求函数 $f(x) = \log_a x\,(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的导数.

解　$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$
$$= \frac{1}{x} \log_a \mathrm{e} = \frac{1}{x\ln a}.$$

即 $$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

这就是对数函数的导数公式,利用该公式可以方便地求出具体的对数函数的导数.

例如 $(\log_2 x)' = \dfrac{1}{x\ln 2}$,$(\log_5 x)' = \dfrac{1}{x\ln 5}$,特别地 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

二、函数可导的充要条件

定理 2.1　函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是左导数和右导数存在并且相等,即 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

例 4　讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 3, x < 1 \\ 2x+1, x \geqslant 1 \end{cases}$ 在点 $x = 1$ 处的可导性.

解　$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - x + 3 - 3}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} x(x+1) = 2$$
$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1-3}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处可导,且 $f'(1) = 2$.

三、导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率,即 $f'(x_0) = \tan\alpha$.

根据导数几何意义可知,曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

例 5 求 $y = \frac{1}{x}$ 在点$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$处的切线方程和法线方程.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}, y'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4$

故所求切线方程为 $y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$

法线方程为 $y - 2 = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$).

四、函数可导与连续的关系

定理 2.2 可导必连续,连续不一定可导.

例 6 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sin x, x \leqslant 0, \\ a + bx, x > 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处可导,试确定 a、b 的值.

解 因为 $x = 0$ 处可导,所以 $f'_-(0) = 2\cos x\mid_{x=0} = 2$;$f'_+(0) = b$,所以 $b = 2$;又因为可导必连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,即 $a = 0$.

习　　题 2.1

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, x \leqslant 0, \\ x + 1, x > 0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$.
2. 求曲线 $y = x^2 - 2x + 1$ 在点$(1,0)$处的切线方程和法线方程.
3. 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点$(0,b)$处的切线方程是 $x - y + 1 = 0$,求 a,b.
4. 用定义证明:$(\cos x)' = -\sin x$.

§2.2 导数的基本公式和运算法则

一、导数四则运算法则

定理 2.3 设 $u = u(x)$,$v = v(x)$是可导函数,则它们经过加减乘除四则运算组合而成的函数仍可导,且其导数满足以下法则:

(1)$(u \pm v)' = u' \pm v'$

可推广到有限个可导函数和(差)的求导法则.例如:$(u + v - w)' = u' + v' - w'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'$.

推论 1: $(cu)' = c \cdot u'$(c 为常数).

可推广到有限个可导函数乘积的求导法则. 例如:$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

例 1　$y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$,求 y'.

解　$y' = 6x^2 - 10x + 3$.

例 2　$f(x) = x^3 + 4\cos x - \sin\dfrac{\pi}{2}$,求 $f'(x)$ 及 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解　$f'(x) = 3x^2 - 4\sin x$.

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 \times \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 - 4\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3}{4}\pi^2 - 4$.

例 3　$y = e^x(\sin x + \cos x)$,求 y'.

解　$y' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x\cos x$.

例 4　$y = \tan x$,求 y'.

解　$y' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

例 5　$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$,求 y'.

解　$y' = \dfrac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \tan x$.

同理: $(\cot x)' = -\csc^2 x$;

$(\csc x)' = -\csc x\cot x$.

二、反函数求导法则

定理 2.4　设函数 $y = f(x)$ 在某区间内单调、可导,且 $f'(x) \neq 0$,则其反函数 $x = \varphi(y)$ 在相应区间内可导,且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad 或 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

例 6　求 $y = \arcsin x$ 的导数.

解　$y = \arcsin x$ 是 $x = \sin y$ 的反函数,$x = \sin y$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调,可导,且 $(\sin y)' = \cos y > 0$,故

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

类似可得 $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1};$$

$$(\text{arccot}x)' = -\frac{1}{x^2+1};$$

例 7 求 $y = \log_a x$ 的导数.

解 $x = a^y$ 为其反函数,在区间$(-\infty, +\infty)$内单调,可导,

且$(a^y)' = a^y \ln a$,故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别地:$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

三、基本初等函数导数公式

$C' = 0$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccot}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

四、复合函数求导法则

定理 2.5 若函数 $u = g(x)$ 在点 x 处可导,而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 处可导,则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可导,且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

复合函数求导法则称为**链式法则**,可推广到有限个可导函数复合的情形.

例如,$y = f(u)$,$u = \varphi(v)$,$v = g(x)$,则复合函数 $y = f[\varphi(g(x))]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot g'(x).$$

例 8 设 $y = (3x+2)^{10}$, 求 y'.

解 $y = (3x+2)^{10}$ 是 $y = u^{10}$ 与 $u = 3x+2$ 的复合,

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot 3 = 30(3x+2)^9.$$

例 9　设 $y = \cos(1+x^2)$，求 y'.

解　$y = \cos(1+x^2)$ 是 $y = \cos u, u = 1+x^2$ 的复合，

$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u. 2x = -2x\sin(1+x^2)$.

例 10　设 $y = \sin\ln(x^2+1)$，求 y'.

解　$y = \sin\ln(x^2+1)$ 是 $y = \sin u, u = \ln v, v = x^2+1$ 的复合，

$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \cos u \cdot \frac{1}{v} \cdot 2x = \frac{2x\cos\ln(x^2+1)}{x^2+1}$.

对复合函数求导法则熟练后，就不必再写出中间变量，而可以采用下列例题的方法来计算.

例 11　设 $y = \ln\cos x$，求 y'.

解　$y' = (\ln\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$.

五、隐函数的导数法则

由二元方程 $F(x,y) = 0$ 确定的函数称为隐函数.

注：隐函数求导法即方程两边同时对 x 求导，同时必须非常明确变量 y 为自变量 x 的函数，要应用复合函数求导法则.

例 12　求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解　方程两边同时对自变量 x 求导，得：

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

整理得：

$$(x + e^y)\frac{dy}{dx} = e^x - y,$$

解得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y}.$$

例 13　求由方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$ 所确定的隐函数在 $x = 0$ 处的导数 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　两边对 x 求导，　有 $5y^4 \cdot y' + 2 \cdot y' - 1 - 21x^6 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1+21x^6}{5y^4+2}$.

当 $x = 0$ 时，$y^5 + 2y = 0$，故 $y = 0$，所以　$y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$.

六、对数求导法

对数求导法则适用于：

(1) 幂指函数,形如$[f(x)]^{g(x)}$ 的函数.

(2) 一系列函数的乘、除、乘方、开方所构成的函数.

注:对数求导法即方程两边同时取以 e 为底的对数,然后按照隐函数求导法则求导.

例 14 设 $y = x^{\sin x}(x > 0)$,求 y'.

解 两边同时取对数,得

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x,$$

两边同时对自变量 x 求导,得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x\ln x + \frac{\sin x}{x},$$

$$y' = y\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right),$$

即

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

例 15 求 $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 在两边取对数得

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)]$$

利用隐函数的求导方法$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x-2)} - \dfrac{1}{2(x-3)} - \dfrac{1}{2(x-4)}$,

$$y' = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right]$$

所以, $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4}\right).$

习　　题 2.2

1. 根据导数四则运算法则求下列函数的导数.

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$;　　(2) $y = x^2\ln x$;

(3) $y = \sin x \cdot \cos x$;　　(4) $y = (2+5x)(4-3x)$;

(5) $y = \dfrac{1}{3+x+x^2}$;　　(6) $y = \dfrac{2\csc x}{1+x^2}$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y = (2x+5)^7$;　　(2) $y = \cos(4-3x)$;

(3) $y = (\arcsin x)^2$;　　(4) $y = \arctan e^x$;

(5) $y = \ln[\ln(\ln x)]$;　　(6) $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$.