∏flµ» ˜—ß'πø™¥Ω≈œfl.pdf 1 2025/7/25 13:47

策划编辑：张芝雄
编辑统筹：蒲　浩
责任编辑：干　强
封面设计：唐韵设计

微信公众号

ISBN 978-7-210-16150-9

定价：49.80元

职业教育国家在线精品课程配套教材

高等数学

主编　曾慧平　易福侠

江西人民出版社

职业教育国家在线精品课程配套教材

高等数学

主审　陈　辉　　主编　曾慧平　易福侠

江西人民出版社
Jiangxi People's Publishing House
全国百佳出版社

职业教育国家在线精品课程配套教材

高等数学

主审 陈 辉 主编 曾慧平 易福侠

江西人民出版社
Jiangxi People's Publishing House
全 国 百 佳 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 曾慧平，易福侠主编. -- 南昌 : 江西人民出版社，2024. 12. -- ISBN 978-7-210-16150-9

Ⅰ. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025ZB4948 号

高 等 数 学
GAODENG SHUXUE

曾慧平　易福侠　主编

责任编辑：干　强
装帧设计：唐韵设计

江西人民出版社 Jiangxi People's Publishing House 全国百佳出版社 出版发行

地　　址：江西省南昌市三经路 47 号附 1 号（330006）
网　　址：www.jxpph.com
电子信箱：jxpph@tom.com
编辑部电话：0791-86898965
发行部电话：0791-86898815
承 印 厂：北京荣玉印刷有限公司
经　　销：各地新华书店

开　　本：787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张：18
字　　数：366 千字
版　　次：2024 年 12 月第 1 版
印　　次：2024 年 12 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-210-16150-9
定　　价：49.80 元
赣版权登字 -01-2024-957

编写委员会

主审

陈　辉

主编

曾慧平　易福侠

副主编

喻　璟　吴青燕　刘红生

在线课程学习指南

本书的配套在线开放课程是职业教育国家在线精品课程“高等数学”，读者可在学银在线平台进行线上学习。

一、选择课程

进入学银在线平台，选择江西交通职业技术学院易福侠老师主讲的“高等数学”课程。

二、在线学习

选择对应课程后进入课程界面，选择对应开课期次，单击“加入课程”按钮即可开始学习（需要手机号注册或使用学习通 App 扫码）。

前 言

本书是创新型高等职业教育教材，是集“纸质教材 + 微课课程 + 数字资源包”于一体的职教改革融媒体工作手册式教材，也是职业教育国家在线精品课程“高等数学”的配套教材。该书严格依据高等数学课程教学标准，紧密对接江西省专升本“高等数学及其应用”科目入学考试要求，顺应教育数字化转型趋势，以“数政融合、数专融通、数字赋能”为育人主线，其中数政融合模块基于数以求真、数以载文、数以匠心、数以启智思政理念。

1. 数政融合，双轮驱动

本书贯彻党的二十大精神和《高等学校课程思政建设指导纲要》，落实立德树人根本任务，创新采用显隐结合的方式，巧妙融入多种思政元素于数学知识之中，推动价值引领、知识传授和能力培养紧密结合，以期学生在掌握数学思想、方法及应用的同时，能树立正确的世界观、价值观与人生观。本书深度践行“数学应用与思政教育并重”的理念，充分发挥数学教育的多元功能。

2. 理实一体，因材施教

本书以“结合工科专业、注重能力、突出应用”为指导思想，深化“问题导向、案例驱动”的教学设计，高度契合学生认知规律与职业发展需求。教材精心编排 25 个与路桥、机电、经济等专业紧密相关的学以致用案例，践行“做中学，学中做”的教学理念，构建“教、学、用”一体化教学模式，引导学生在解决问题中学习，激发创新思维与应用能力，提升学习兴趣。此外，本书是工作手册式新形态教材，适应教学模式改革需要，特色鲜明。

3. 数专融通，无缝对接

在知识与技能运用方面，强调培养数学应用意识，以“案例驱动”突显数学内容与专业学习的融合。例如，面向道路与桥梁工程技术等专业的岗位，以专业最新案例为载体，开发了“学以致用”模块和工作手册任务，凸显职业教育主线。

4. 数字赋能，与时俱进

教材每节均介绍 Matlab 软件的使用，借助数学软件编程演示、验证概念定理，激发学生兴趣，丰富感性认知，降低思维难度，增进学生对概念、公式的理解，培养学生运用数学计算软件解决问题的能力。

5. 多元资源，助力教学

本书在关键知识点处配备精心录制的微课视频，学生扫码即可随时观看，加深对知识点的理解。

本书由江西交通职业技术学院曾慧平、易福侠担任主编，喻璟、吴青燕、刘红生担任副主编，陈辉担任主审。具体编写分工如下：曾慧平负责第 1 章至第 5 章的正文部分、Matlab 应用部分的编写，易福侠负责第 6 章和第 7 章的正文及对应章节工作手册任务的编写，喻璟负责第 1 章至第 4 章重难点的微视频录制、动画视频制作工作，吴青燕负责第 5 章至第 7 章重难点的微视频录制、动画视频制作工作及本书章节测试内容，刘红生负责工作手册第 1 章至第 5 章任务的编写，陈辉负责对教材进行全面审核。

本书作者为广大一线教师提供了服务于本书的教学资源库，有需要者可致电教学助手 13810412048 或发邮件至 2393867076@qq.com。因编者水平有限，书中难免存在疏漏与不妥之处，诚望广大读者批评指正。

目 录

第 1 章 函数与极限

第 2 章 导数与微分

目　录

第 4 章 不定积分

第 5 章 定积分及其应用

目　录

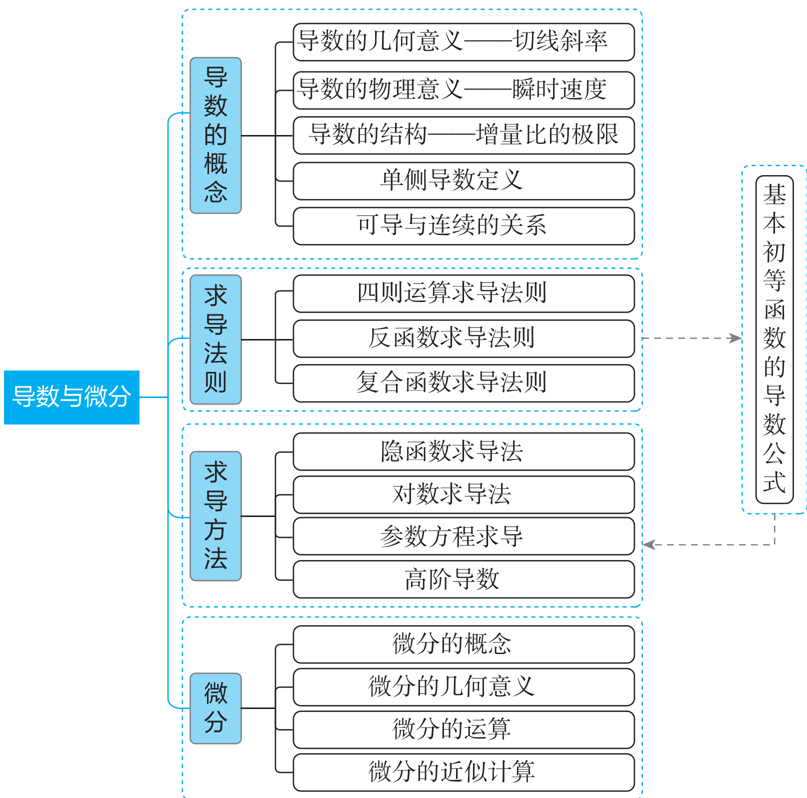
第 7 章　多元函数微积分

第 2 章
导数与微分

章节导入

导数与微分都是微分学的基本概念，导数概念最初是从寻找曲线上点的切线的斜率及确定变速直线运动的瞬时速度中产生的，它在理论和实践中有着广泛的应用，物理学、几何学、经济学等学科中的一些重要概念都可以用导数来表示．微分概念和导数概念几乎是同时产生的，本章将介绍导数的概念、微分的概念及其运算法则．

思维导图



学习目标

知识目标

（1）理解导数的定义、几何意义、函数可导性与连续性的关系，掌握用导数定义判断函数在一点处是否可导的方法.

（2）熟练掌握导数的基本公式、四则运算法则、复合函数求导法则.

（3）理解高阶导数的概念，会求函数的二阶导数.

（4）掌握隐函数和由参数方程所确定的函数的求导法，掌握对数求导法.

（5）理解微分的概念，理解可导与可微的关系，掌握函数微分的求解方法.

能力目标

（1）能够灵活选用相应的方法准确求解不同类型函数的导数，提升观察分析、独立思考、猜想归纳及解决实际问题的能力.

（2）能够系统地思考并分解复杂问题，将导数应用于解决实际问题.

（3）能够用数学软件进行复杂函数的导数计算和图形可视化，提高计算效率和直观理解.

素养目标

（1）了解极限思想在导数中的应用，培养抽象思维、逻辑思维和批判性思维.

（2）体会“以不变代变，用近似逼近精确”的科学研究重要方法，提高数值分析能力.

（3）在团队合作中提升沟通交流能力，弘扬服务集体、团结协作的团队精神.

2.1　导数的概念

在微积分诞生之前，关于曲线的切线问题和运动物体的瞬时速度问题，吸引了很多数学家的注意．这些问题激发了对新的数学工具的需求，推动了微积分的创立．

2.1.1　两个实例

引例 1　变速直线运动物体的瞬时速度

设一物体做变速直线运动，其路程函数为 $s=s(t)$，求该物体在 t 时刻的瞬时速度．设在 t 时刻物体的位置为 $s(t)$．当时间变为 $t+\Delta t$ 时，物体的位置函数 s 相应地有增量 $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$，如图 2-1 所示．

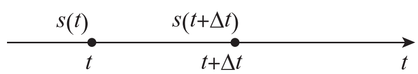


图 2-1

物体在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内的平均速度，记作 $\bar{v}$，有

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

当 $|\Delta t|$ 很小时，$\bar{v}$ 可作为物体在 t 时刻的瞬时速度的近似值．且 $|\Delta t|$ 越小，$\bar{v}$ 就越接近物体在 t 时刻的瞬时速度，当 $\Delta t\to 0$ 时，由极限定义可得

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

由此可见，物体运动的瞬时速度就是当时间改变量趋于零时，路程函数的增量和时间增量之比的极限．

例 1　对自由落体运动 $s=\frac{1}{2}gt^2$，求：

（1）落体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度 $\bar{v}$；

（2）落体在 t_0 时刻的瞬时速度 v．

解　（1）

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^{\,2}}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)\Delta t}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t.$$

（2）$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt_0$．

引例 2　平面曲线的切线斜率

曲线 $y=f(x)$ 的图形如图 2-2 所示，点 M 为曲线 L 上一定点，点 N 为曲线上异于 M 的点，连接 M 和 N 的直线称为曲线的割线，则割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

其中 φ 为割线 MN 的倾斜角.

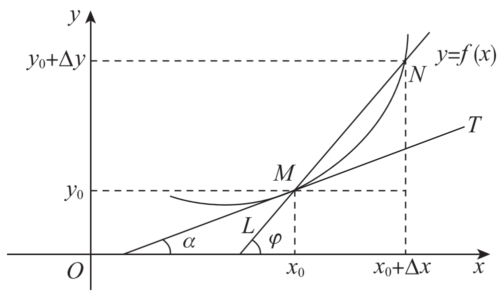


图 2-2

当 $\Delta x\to 0$ 时，点 N 沿着曲线 L 无限趋近于点 M，这时割线 MN 以 M 为支点不断转动而趋近于极限位置 MT，相应地割线 MN 的斜率 $\tan\varphi$ 也趋近于直线 MT 的斜率，从而我们得到切线的斜率

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

由此可见，曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线的斜率是纵坐标 y 的增量 Δy 与横坐标 x 的增量 Δx 之比，当横坐标 x 的增量 Δx 趋于零时的极限.

上述两个实例，一个是物理问题，另一个是几何问题，它们的实际背景不同，但是从数量关系来分析，都是研究函数的增量与自变量增量之比的极限问题，这类极限问题在其他领域上也会同样遇到，因此我们将它们抽象成导数问题.

数字动画
切线的定义

❖ 素质广角

微积分的三大核心问题之一：已知一条曲线，求它各处的切线斜率. 看待曲线，有两种方式. 一种是老方式，一种是新方式. 在 17 世纪早期微积分出现之前，这类曲线都被视为几何对象，它们本身就令人着迷，所以数学家试图量化它们的几何性质. 已知一条曲线，他们想算出曲线上每一点的切线斜率. 到了 21 世纪，科学家们对产生曲线的函数更感兴趣. 通过曲线展示出来某个自然现象或工艺流程，用函数来建立模型. 尽管数据是曲线，但支撑它的，却是更深层次的东西. 这两种观点之间的碰撞，既是曲线之谜和变化之谜的碰撞，也是古代几何学与现代科学的碰撞. 扫码观看视频，了解几何学背景下和现代科学背景下科学家们确定切线的方法.

数苑撷英
关于切线的确定方法

2.1.2 导数的定义

定义 2.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx（$\Delta x\neq 0$ 且 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地，函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，那么此极限值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数．记作 $f'(x_0)$，或记为 $y'\big|_{x=x_0}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果上述极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导．

简单地说：导数的实质就是增量比的极限．

重难点视频
导数的概念

如果固定 x_0，令 $x_0+\Delta x=x$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$，故函数在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 也可表示为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

思路点拨

根据导数的定义，计算函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，可分为以下三个步骤：

（1）计算增量：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

（2）计算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

（3）计算比值的极限：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$.

例 2 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$.

解 （1）求增量 Δy：$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2$；

（2）求比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x\,(\Delta x\neq 0)$；

（3）求极限：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$

因此$f'(1)=2.$

2.1.3 左、右导数

定义 2.2　如果左极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为$f(x)$在 x_0 处的**左导数**，记为$f_-'(x_0)$；如果右极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为$f(x)$在 x_0 处的**右导数**，记为$f_+'(x_0)$.

定理 2.1　$f(x)$在点 x_0 处可导的充分必要条件是$f(x)$在点 x_0 的左、右导数存在且相等.

例 3　讨论$f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\leqslant 1,\\ 2x^3, & x>1\end{cases}$在点 $x=1$ 处的可导性.

解　$f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x^2+x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3,$

$f_+'(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^3-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}2(x^2+x+1)=6.$

因为左导数≠右导数，所以$f(x)$在 $x=1$ 不可导.

2.1.4 导数的几何意义

根据前面引例 2 平面曲线的切线斜率的求法和导数的定义，可以知道，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$在相应点(x_0,y_0)处的切线斜率，即

$$\tan\alpha=f'(x_0).$$

因而曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

特别地，若$f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴，切线方程就是 x 轴的垂线 $x=x_0$.

曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的法线方程为

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad(f'(x_0)\neq 0).$$

数字动画
切线与法线

例 4 求抛物线 $y=x^2$ 在点(1, 1)处的切线方程和法线方程.

解 $y'=2x, y'(1)=2$. 即曲线 $y=x^2$ 在点(1, 1)处的切线斜率为 2，所以，所求的切线方程为

$$y-1=2(x-1)\text{，即 } 2x-y-1=0.$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\text{，即 } x+2y-3=0.$$

2.1.5 可导与连续的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续是指 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，而在点 x_0 可导是指 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，那么这两种极限有什么关系呢?

定理 2.2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，反之则不一定成立.

证 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0.$$

由此可见 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

但其逆不真，即 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，不一定能得出函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导.

例 5 讨论函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解 因为 $\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|$，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$，即函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

点 $x=0$ 处的左导数是 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1.$

点 $x=0$ 处的右导数是 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=1.$

因为左、右导数不相等，故函数在该点不可导.

例 6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性和可导性.

解 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2=f(1)$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2=f(1)$，

所以函数 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

而 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 的左导数是

$$f_-'(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2,$$

右导数是

$$f_+'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}=2,$$

因为左、右导数存在且相等，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

✪ 学以致用

若曲线处处可导，则称曲线是光滑的．数学中的曲线光滑与专业中的设计曲线线形流畅相对应．怎样验证设计曲线是否线形流畅？

假设公路某弯道的设计曲线方程为 $y=\begin{cases}2x-1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 4,\\ 8x-16, & 4<x\leqslant 7,\end{cases}$ 请检验该曲线是否线形流畅.

解：分别验证设计曲线函数在 $x=1$ 和 $x=4$ 处的可导性.

在 $x=1$ 处：

$$f_-'(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2x-1-1}{x-1}=2,$$

$$f_+'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

由于 $f_-'(1)=f_+'(1)$，所以函数在 $x=1$ 处可导.

在 $x=4$ 处：

$$f_-'(4)=\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{x^2-16}{x-4}=8,$$

$$f_+'(4)=\lim_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{8x-16-16}{x-4}=8.$$

由于 $f_-'(1)=f_+'(1)$，所以函数在 $x=4$ 处可导.

综上所述，弯道设计曲线在设计区间 $(-1,7)$ 内处处可导，因而该弯道设计曲线线形流畅.

本节自测2.1

1. 一物体做直线运动，它所经过的路程 s 和时间 t 的关系是 $s=t^3$(cm)，求：

(1) 物体从 $t_1=1$(s)到 $t_2=1.1$(s)的平均速度；

(2) 速度函数 $v(t)$.

2. 求抛物线 $f(x)=\frac{4}{3}x^3$ 在点(1, 1)处的切线方程和法线方程.

3. 试求出曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 上与直线 $x+2y=1$ 平行的切线方程.

4. 已知 $f'(x_0)=A$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}$.

5. 已知 $f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-1}{3x}=4$，求 $f'(0)$.

6. 讨论 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

【Matlab 应用】 用 Matlab 展示导数的几何意义

1. 求导函数 diff 的调用：D = diff(fx, x)

说明：D 是所求的导数，fx 是函数的符号表达式，x 是符号变量.

示例 1　求函数 $y=xe^{x^2}$ 的一阶导数.

在命令行窗口输入：

```
>> syms x
>> y=x*exp(x^2);
>> D=diff(y)
```

运行结果：

```
D=
exp(x^2) + 2*x^2*exp(x^2)
```

2. 用 Matlab 展示导数的几何意义

示例 2　以曲线 $y=3+2x-x^2$ 为例，以 $(0,3)$ 为切点画出曲线、切线和割线图形.

新建脚本文件，输入如下指令：

```
syms x t
f1=3+2*x-x.^2;
f2=diff(f1);                    %求 f1 的导数
x=0;                            %此处 x 赋值为 0，后面不能再用 x 表示变量
k=eval(f2);                     % x=0 处的切线斜率
f3=k*t+3;                       % x=0 处的切线方程
fplot((f3),[-1 3])              %绘制 x=0 处的切线图像
hold on
fplot((f1),[-1 3])              %绘制函数图像
for i=2:-0.1:0
f4=inline('3+2*x-x.^2',x);
f5=3+((f4(i)-f4(0))./i)*t;      %绘制割线图形
fplot((f5),[-1 3],'k')
pause(2)
ylim([1,5])                     %控制纵坐标的取值范围
end
```

更多内容讲解请扫码观看.

Matlab 视频
Matlab 展示导数几何意义

2.2　求导法则

2.2.1　函数的四则运算求导法则

定理 2.3　设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商在点 x 处也可导，且有以下法则：

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2）$(uv)'=u'v+uv'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v(x)\neq 0)$.

知识要点

数字动画
导数的乘法法则

法则（1）、（2）可推广到任意有限个可导函数的情形，如

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw',$$

$$(cu)'=(c)'u+cu'=cu'.$$

法则（3）的特例：$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$.

例 1 设 $y=\sqrt{x}\cos x+4\ln x+\sin\dfrac{\pi}{7}$，求 y'.

解 $y'=(\sqrt{x}\cos x)'+(4\ln x)'+\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)'$.

$$=(\sqrt{x})'\cos x+\sqrt{x}(\cos x)'+4(\ln x)'$$

$$=\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\sin x+\frac{4}{x}.$$

易错辨析

要特别注意题目中的常值函数，如 $\sin\dfrac{\pi}{7}$、e^2、$\ln 2$ 等.

例 2 设 $y=x\ln x$，求 y'.

解 $y'=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'$

$$=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\ln x+1.$$

例 3 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$,

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

即

$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

同理可得

$$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

例 4　设 $y=\sec x$，求 y'.

解　$y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$，

即

$$(\sec x)'=\sec x\tan x.$$

同理可得

$$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

例 5　设 $y=x^2\sin x\ln x$，求 y'.

解　$y'=(x^2\sin x\ln x)'=2x\sin x\ln x+x^2\cos x\ln x+x\sin x$

$=x(2\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x)$.

2.2.2 反函数的求导法则

定理 2.4　如果单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y 处可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的点 x 处可导，且有 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$. 即反函数的导数等于其直接函数的导数的倒数.

例 6　求 $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解　$y=a^x$ 是 $x=\log_a y$ 的反函数，且 $x=\log_a y$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调、可导，又

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y\ln a}\neq 0.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=y\ln a=a^x\ln a,$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别地，有

$$(e^x)'=e^x.$$

例 7 求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，$x=\sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且 $\frac{dx}{dy}=\cos y>0.$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 8 求 $y=\arctan x$ 的导数.

解 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 的反函数，$x=\tan y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且 $\frac{dx}{dy}=\sec^2 y\neq 0.$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

即

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

同理可得

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

2.2.3 基本初等函数求导公式

基本初等函数求导公式如表 2-1 所示.

表 2-1

<table>
<tr><th>序号</th><th>基本导数公式</th><th>序号</th><th>基本导数公式</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>$(c)'=0$</td><td rowspan="6">(5)</td><td>$(\sin x)'=\cos x$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$</td><td>$(\cos x)'=-\sin x$</td></tr>
<tr><td>$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$</td><td>$(\tan x)'=\sec^2 x$</td></tr>
<tr><td>$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$(\cot x)'=-\csc^2 x$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)</td><td>$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$</td><td>$(\sec x)'=\sec x\tan x$</td></tr>
<tr><td>$(\ln x)'=\frac{1}{x}$</td><td>$(\csc x)'=-\csc x\cot x$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(4)</td><td rowspan="2">$(a^x)'=a^x\ln a$</td><td rowspan="4">(6)</td><td>$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$</td><td>$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$</td></tr>
<tr><td>$(\mathrm{arccot}\ x)'=-\frac{1}{1+x^2}$</td></tr>
</table>

知识要点

表格中函数的求导公式是按六类基本初等函数分类给出的，熟记公式时可以按类别记忆.

幂函数求导是一种降幂过程.

带“余”的三角函数和反三角函数，例如 $\cos x$，$\cot x$，$\csc x$，$\arccos x$，$\mathrm{arccot}\ x$，它们的导数结果都带有负号.

2.2.4 复合函数的求导法则

想一想

已知$(\sin x)'=\cos x$，那么是否有$(\sin 2x)'=\cos 2x$呢?

定理 2.5 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的点 $u=\varphi(x)$ 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 也在点 x 处可导，且有 $\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x)$ 或 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 或$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

知识要点

(1) 上述定理可表述为复合函数对自变量的导数，等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数. 因此，在求导过程中确定中间变量是十分重要的.

(2) 可以推广到有限次复合的复合函数的求导.

例如，若 $y=f(u)$、$u=\varphi(v)$ 和 $v=\psi(x)$ 均可导，则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 也可导，且有 $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$ 或$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

重难点视频
复合函数求导法则

例 9 求 $y=\sin 2x$ 的导数.

解 函数 $y=\sin 2x$ 可以看作由函数 $y=\sin u$ 与 $u=2x$ 复合而成，因此

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'(2x)'=2\cos u=2\cos 2x.$$

例 10 求 $y=(2x-1)^3$ 的导数.

解 函数 $y=(2x-1)^3$ 可以看作由函数 $y=u^3$ 与 $u=2x-1$ 复合而成，因此

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(u^3)'(2x-1)'=2\cdot 3u^2=6u^2=6(2x-1)^2.$$

例 11 求 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$ 的导数.

解 函数 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$ 可以看作由函数 $y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=\cos x$ 复合而成，因此

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\mathrm{e}^u)'(\cos x)'=\mathrm{e}^u(-\sin x)=-\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\sin x.$$

思路点拨

对于复合函数的分解和求导比较熟悉后，就不必再写出中间变量，可以利用基本导数公式的拓展形式来计算.

例如，公式 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ 可拓展为 $(\square^{\mu})'=\mu\square^{\mu-1}\cdot\square'$；公式 $(e^{x})'=e^{x}$ 可拓展为 $(e^{\square})'=e^{\square}\cdot\square'$.

例 12　求 $y=\sqrt{1+x^2}$ 的导数.

解　将 $1+x^2$ 看成$\square$，利用公式 $(\square^{\mu})'=\mu\square^{\mu-1}\cdot\square'$求导，

因此

$$y'=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)'=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

例 13　求函数 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 的导数.

解　将 $\tan\frac{x}{2}$ 看成$\square$，利用公式 $(\ln\square)'=\frac{1}{\square}\cdot\square'$求导，

$$y'=\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'.$$

继续将$\frac{x}{2}$看成$\square$，利用公式 $(\tan\square)'=\sec^2\square\cdot\square'$得

$$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin x}=\csc x.$$

解题要点

综上所述，可以看出，学习复合函数的求导法则，必须掌握以下几点内容：

(1) 复合函数的分解；

(2) 基本初等函数的求导公式；

(3) 导数的四则运算法则；

(4) 复合函数的求导法则.

思路点拨

在求导过程中应注意对函数进行适当的初等变形.

例 14 求函数$\frac{5x^2+3x-\sqrt{x}}{x}$的导数.

解 这道题如果直接用分式的求导法则，求解过程比较麻烦，不妨尝试先分解再求导.

$$y'=(5x+3-x^{-\frac{1}{2}})'=(5x)'+(3)'-(x^{-\frac{1}{2}})'=5+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

例 15 求函数 $y=\ln\left(\frac{a}{x^2}\right)(a>0)$ 的导数.

解 这道题如果直接用分式的求导法则，求解过程比较麻烦，我们可以尝试先分解再求导.

$$y'=(\ln a-\ln x^2)'=(\ln a-2\ln x)'=-\frac{2}{x}.$$

素质广角

道家学派创始人老子在道家哲学经典著作《道德经》中提出："一生二，二生三，三生万物."这句话映射出自然界从单一到多元、从简单到复杂的自然生成过程. 而导数运算体系的构建也遵循这一发展规律. 求函数的导数正是从导数的基本定义出发，推演出函数的 3 大求导法则和 16 条基本求导公式，这一过程恰似"一生二，二生三"的递进.

学以致用

基本概念：道路路面如图 2-3 所示，沿中心线竖直剖开然后展开即为道路路线纵断面，纵向曲线即是竖曲线，竖曲线两侧直线称为**纵坡线**. 如图 2-4 所示，曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 是竖曲线，A 点左侧直线和 B 点右侧直线是纵坡线. 两纵坡线的交点称为**变坡点**，纵坡线上的点与变坡点的高程差除以水平距离，称为**纵坡**、**坡度**.

任务要求：公路某上坡路段竖曲线的方程为 $y=-\left(\frac{x}{20}-1\right)^2+25$. 为打造畅通、安全、绿色的出行环境，某部门决定对该路段公路进行升级改造，将设计速度由原来的

40 km/h 提升至 60 km/h. 根据《公路路线设计规范》要求，设计速度为 60 km/h 的竖曲线最大纵坡不超过 6%. 为尽可能使用原有路基，该部门决定调整竖曲线左侧直线段.

图 2-3

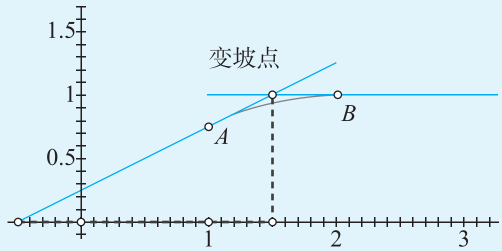


图 2-4

道路路线改造前、后示意图如图 2-5 所示. 问：当爬坡起点 A 移动到 E 点 $x_0=9$ 处时，其纵坡是否满足设计规范？

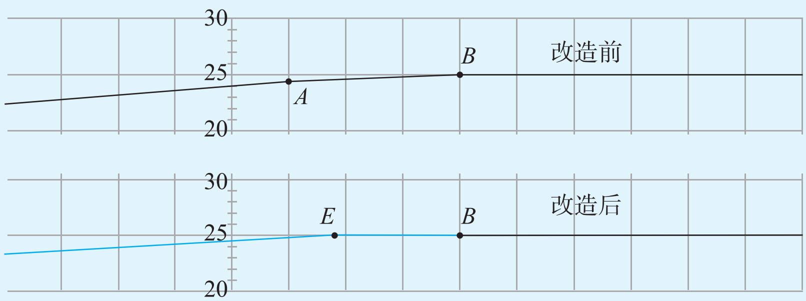


图 2-5

解： 由于变坡点始终在纵坡线的延长线上，所以纵坡即为纵坡线与竖曲线交点处的导数. 因此，只需检验 E 点 $x_0=9$ 处左侧切线斜率是否小于 6% 即可.

$$y'=-2\left(\frac{x}{20}-1\right)\cdot\frac{1}{20}=-\frac{1}{10}\left(\frac{x}{20}-1\right).$$

当 $x_0=9$ 时，纵坡 $k=-\frac{1}{10}\left(\frac{9}{20}-1\right)=5.5\%<6\%$.

因此，当爬坡起点 A 移动到 E 点处时，其纵坡满足设计规范.

本节自测2.2

1. 求下列函数的导数.

（1）$y=x^4+\frac{5}{x^3}-\sqrt{x}+\frac{1}{4}$；　　（2）$y=2^x+2e^x-\ln\pi$；

(3) $y=\sin x-\cot x+\sec x$;

(4) $y=\ln x\cos x$;

(5) $y=x^2\sin \mathrm{e}$;

(6) $y=3^x\mathrm{e}^x\tan x$;

(7) $s=\dfrac{2+\sin t}{\cos t}$;

(8) $y=\dfrac{\arcsin x}{x}$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=(2x+1)^4$;

(2) $y=\sin x^2$;

(3) $y=\mathrm{e}^{4x}$;

(4) $y=3^{\sin x}$;

(5) $y=\ln(3x+1)$;

(6) $y=\sqrt{\cos x}$;

(7) $y=\tan \dfrac{1}{x}$;

(8) $y=\sec\sqrt{x}$;

(9) $y=\arctan 3x$;

(10) $y=(\arccos x)^2$.

3. 求下列函数的导数.

(1) $y=3\sin 2x+2\cos 3x$;

(2) $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\sin 3x$;

(3) $y=\dfrac{\sin 3x}{x}$;

(4) $s=\mathrm{e}^{(2t+\ln t)}$.

【Matlab 应用】 多项式的运算

1. 多项式的创建

(1) 直接输入法. 构造带字符多项式的基本方法是直接输入，主要由 26 个英文字母及空格等一些特殊符号组成.

示例 1　输入符号多项式：ax^n+bx^{n-1}.

```
>> 'a*x^n+b*x^(n-1)'
```

(2) 调用函数 poly2sym 法. 构造带数值多项式最简单的方法就是直接输入向量. 这种方法通过函数 poly2sym 来实现，调用格式：poly2sym(p).

示例 2　构建多项式 $3x^4-2x^3+4x^2+6x+8$.

```
>> p=[3 -2 4 6 8];
>> f=poly2sym(p)
```

2. 数值多项式的四则运算

（1）乘法运算：通过函数 conv(p1, p2) 来实现.

示例 3　输入下列程序并运行，观察运行结果.

```
>> p1=(1:5); p2=(2:6);
>> poly2sym(p1+p2)                    %加法运算的维度必须相同
>> f=conv(p1, p2);                    %返回结果是多项式对应的向量
>> poly2sym(f)
```

（2）除法运算：通过函数 deconv(p1, p2) 来实现，调用格式：[k, r] =deconv(p, q)，其中 k 返回的是 p 除以 q 的商，r 是余式.

注意：deconv(p1, p2) 只能用于向量创建的数值型多项式，不适用于符号多项式，且 p2 的向量首元必须是非零的.

示例 4　演示多项式的四则运算.

```
>> p1=[2 3 4 0 -2]; p2=[8 -5 6];
>> p=conv(p1, p2);
>> p=poly2sym(p)
>> [k, r] =deconv(p1, p2);
>> k=poly2sym(k)
>> r=poly2sym(r)
```

Matlab 视频
多项式的运算

更多内容讲解请扫码观看.

2.3　函数的求导方法及高阶导数

2.3.1 隐函数的导数

1. 隐函数的定义

隐函数是不同于函数 $y=f(x)$ 的一种函数，它在一些高精尖的工程技术中都有应用. 由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的变量 x 与 y 之间的关系式称为隐函数，例如 $x^2+y^2=1$, $y+x^y=0$ 等.

而把形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数，例如 $y=x^2$, $y=\sqrt{1+x^3}$ 等.

2. 常见的隐函数曲线

（1）笛卡儿心形函数（图 2-6）：$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$.

数字动画
笛卡儿心形线

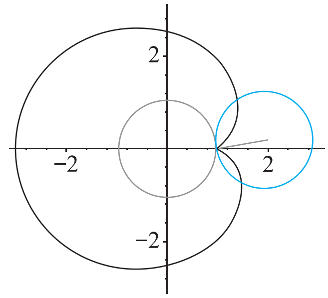


图 2-6

素质广角

笛卡儿心形线是动圆在定圆的外面相切滚动时，圆周上一点形成的运动轨迹. 笛卡儿心形线的爱情故事是一个流传甚广但历史真实性存疑的浪漫传说. 笛卡儿在流亡瑞典期间，于街头邂逅了年轻的瑞典公主克里斯汀. 公主对数学充满好奇，与笛卡儿迅速建立了深厚的师生情谊. 笛卡儿开始担任公主的私人教师，教授她数学和其他学科知识.

然而，这段关系最终因王室的反对而被迫中断. 在笛卡儿离开后不久，他不幸感染黑死病. 在生命的最后时刻，笛卡儿给公主写了一封信，信中没有直接的文字表达，只有一个方程. 当克里斯汀按照方程在坐标系中画出图形时，显现出来的是一个美丽的心形线，被认为是笛卡儿对她隐藏的深情告白. 笛卡儿与公主的爱情故事因心形曲线流传至今，笛卡儿也被誉为最浪漫的数学家. 实际上，心形线是笛卡儿在其科学研究中发现的众多曲线之一，他在科学领域的贡献远比这个故事更为影响广泛和深刻.

（2）冯·卡门曲线函数：$2\pi r^2=2R^2\theta-R^2\sin 2\theta$，$r=r(\theta)$.

素质广角

长征五号 B 运载火箭的整流罩前端设计采用了流线型的冯·卡门曲线外形. 这一设计旨在改善火箭的气动特性，通过减小空气阻力并减轻载荷影响，从而提高火箭的性能和效率.

3. 隐函数的求导

解题要点

隐函数 $F(x,y)=0$ 所确定的函数关系为 $y=f(x)$，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的基本步骤：

（1）方程 $F(x,y)=0$ 两边同时对 x 求导. 但应注意，当方程 $F(x,y)=0$ 的两端对 x 求导时，要记住 y 是关于 x 的函数，求含 y 项的导数都要用复合函数求导法则求导；

（2）将关于 y' 的项都移到等号的左边，其他项都移到等号的右边，化为 $G(x,y)y'=H(x,y)$；

（3）将 y' 前的 $G(x,y)$ 除到等号右边，化为 $y'=\frac{H(x,y)}{G(x,y)}$.

知识要点

（1）对方程两边求导时，特别注意 $\varphi(y)$ 对 x 的导数为 $\varphi'(y)\cdot y'$；

（2）隐函数的导数中允许含有 y.

例 1　求方程 $x^2+y^2=R^2$（R 为常数）所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数 y'.

解　方程两端对 x 求导，注意 y 是关于 x 的函数，得

$$2x+2yy'=0,$$

移项得

$$2yy'=-2x,$$

解得

$$y'=-\frac{x}{y}(y\neq 0).$$

例 2　求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数 y'.

解　方程两端对 x 求导，得

$$y+xy'-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y y'=0,$$

移项得

$$(x+\mathrm{e}^y)y'=\mathrm{e}^x-y,$$

解得

$$y'=\frac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}(x+\mathrm{e}^y\neq 0).$$

例 3 求曲线 $3y^2=x^2(x+1)$ 在点 $(2,2)$ 处的切线方程.

解 方程两边对 x 求导，可得

$$6yy'=3x^2+2x.$$

解得

$$y'=\frac{3x^2+2x}{6y}(y\neq 0).$$

将点 $(2,2)$ 代入上式解得切线斜率

$$k=y'\big|_{(2,2)}=\frac{4}{3},$$

因而所求切线方程为

$$y-2=\frac{4}{3}(x-2),$$

即

$$4x-3y-2=0.$$

2.3.2 对数求导法

知识要点

对数求导法的适用情形如下.

幂指函数：$y=f(x)^{g(x)}$；

连乘形式的函数：$y=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$；

分式形式的函数：$y=\dfrac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)}$；

无理函数：$y=\sqrt[m]{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)}$.

重难点视频
对数求导法

例 4 求 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数 y'.

解 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 两边取对数，得

$$\ln y=\sin x\ln x,$$

两边求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x,$$

解得

$$y'=y\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right).$$

素质广角

对形如 $y=\sqrt{\dfrac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)}}$ 的复杂函数进行求导，如果直接使用求导法则进行计算，其计算量会很大. 但是用对数求导法将显函数求导问题转化为隐函数后求导，可以轻松计算该函数的导数.

对数求导法揭示了《闲情偶寄》中的一句话："变则新，不变则腐；变则活，不变则板." 人生许多困境，往往并非事有多难，而是因为固守眼前那一条路. 所谓穷则变，变则通，让思维转个弯，一筹莫展的问题兴许便迎刃而解. 刘润曾说："平庸的人改变结果，优秀的人改变原因，而最高级的人改变思维." 所以，无论做什么事，固守惯性思维，一路直撞南墙，往往吃力不讨好. 只有随势而变，学会换一个角度去看待问题，面对困境时方可游刃有余.

例 5　设 $y=(x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(x-2)}$，求 y'.

解　在等式两边取对数，化简得

$$\ln y=\ln(x-1)+\frac{2}{3}\ln(3x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-2).$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2},$$

解得

$$y'=(x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(x-2)}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3x+1}+\frac{1}{3(x-2)}\right].$$

解题要点

方程两边同时取对数后，务必用对数函数的性质进行简化，常用的对数性质：

（1）$\ln\dfrac{M}{N}=\ln M-\ln N$；

（2）$\ln MN=\ln M+\ln N$；

（3）$\ln M^k=k\ln M$.

2.3.3 由参数方程所确定的函数的导数

1. 由参数方程所确定的函数的定义

y 与 x 之间的函数关系间接通过含参数 t 的方程组 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 来确定，此函数关系所

表示的函数为由参数方程所确定的函数.

2. 常见的由参数方程所确定的函数曲线

(1) 三次参数样条曲线.

现代公路的弯道设计，在地形比较复杂的情况下，通常采用全曲线设计方法. 三次参数样条曲线是常用的全曲线弯道设计方法之一，其曲线的函数结构如下：

$$\begin{cases} x(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3, \\ y(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3, \end{cases} t\in[\alpha,\beta].$$

(2) 星形线.

星形线也称为内摆线，是动圆沿定圆的内侧（两圆始终内切）滚动时，动圆圆周上某点形成的运动轨迹，如图 2-7 所示，其函数结构为

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$$

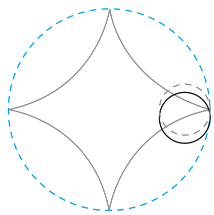


图 2-7

数字动画
星形线
(内摆线)

(3) 摆线.

摆线是圆在直线上（圆与直线始终相切）滚动时，圆周上的某点的运动轨迹，如图 2-8 所示，其方程为

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\ \theta), \\ y=a(1-\cos\ \theta). \end{cases}$$

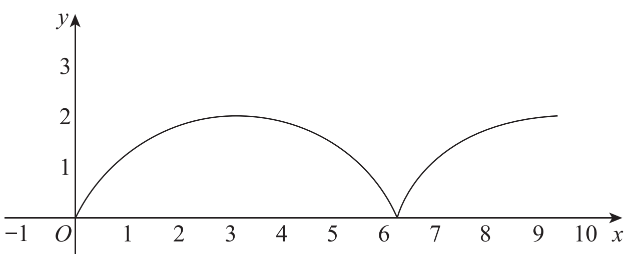


图 2-8

数字动画
摆线

素质广角

陕西历史博物馆如图 2-9 所示，它的屋顶被设计成经典的凹曲屋面. 凹曲屋面，即房脊高耸，屋檐低下且向外延伸、微微翘起，使屋面呈现向下弯曲的凹曲面的屋顶设计形式. 凹曲屋面的纵断面曲线其实就是一种特殊的摆线.

先秦时期科技著作《考工记》中记载："上尊而宇卑，则吐水疾而溜远." 意思就是，凹曲屋面的这种造型，可以让屋顶排水达到既快又远的效果. 由此可知，把建筑屋面设计成凹曲的形状，是古人在不断实践中得出的最优设计. 中国古建筑中的凹曲屋面，集功能与审美于一体，其蕴含的数学密码是古人智慧的结晶.

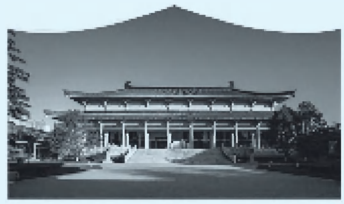


图 2-9

3. 由参数方程所确定的函数求导

如果函数 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，又 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则由参数方程确定的函数可以看成 $y=\psi(t)$ 与 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数.

根据复合函数与反函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 6 设参数方程 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 确定了函数 $y=f(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t.$

例 7 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$：

（1）在任意点的切线斜率；

（2）在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解 （1）摆线在任意点的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a(1-\cos t)'}{a(t-\sin t)'}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}.$$

（2）当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，摆线上对应点为 $\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),\ a\right)$，在此点的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\cot\frac{t}{2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1.$$

于是，切线方程为

$$y-a=x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

即

$$x-y+a\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

2.3.4 高阶导数

1. 高阶导数的概念

如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是关于 x 的可导函数，就称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y''，$f''(x)$ 或$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')'=f''(x) \text{ 或} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

类似地，二阶导数的导数叫作三阶导数，三阶导数的导数叫作四阶导数，……，一般地，函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数叫作 n 阶导数. 这些导数分别记作

$$y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)} \text{ 或} \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

且有

$$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]',$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. 求高阶导数并不需要新的方法，只要由低到高逐阶求导，直到所要求的阶数即可，所以仍可用前面学过的求导方法来计算高阶导数.

2. 高阶导数的计算

例 8 设函数 $y=3x^4-x^2+x+1$，求 y''.

解 $y'=12x^3-2x+1, y''=36x^2-2.$

例 9 设函数 $y=x\mathrm{e}^{-x}$，求 y''.

解 $y'=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$，$y''=-\mathrm{e}^{-x}(1-x)-\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(x-2)$.

例 10　设函数 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解　$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，

$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，

$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，

$y^{(4)}=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，

依次类推，可得

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

类似地，有 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

学以致用

假设某公路弯道设计的三次参数样条曲线的方程为

$$\begin{cases}x(t)=-5-2t+25t^2-8t^3,\\ y(t)=2-2t+25t^2-10t^3,\end{cases}\quad t\in[0,1].$$

弯道两端的直线道与该弯道相切衔接，如图 2-10 所示，求两直线道的方程.

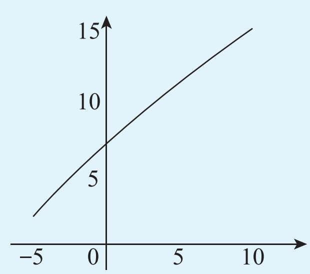


图 2-10

解： 分别求出 $t=0$ 和 $t=1$ 处的切线方程即可.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-2+50t-30t^2}{-2+50t-24t^2}.$$

当 $t=0$ 时，$x_0=-5, y_0=2, k\big|_{t=0}=1$，所以左侧直线道的方程为

$$y-2=1\cdot(x+5),$$

即

$$x-y+7=0.$$

当 $t=1$ 时，$x_1=10, y_1=15$，$k\big|_{t=1}=\dfrac{3}{4}$，所以左侧直线道的方程为

$$y-15=\frac{3}{4}\cdot(x-10)，即\ 3x-4y+30=0.$$

本节自测2.3

1. 求下列方程所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数 y'.

（1） $e^y+xy-e=0$； （2） $x^3+y^3=a^3$；

（3） $xy+\ln y=1$； （4） $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$.

2. 求曲线 $2x^2-y^2-y^3=0$ 在点(1, 1)处的切线方程.

3. 用对数求导法求下列函数的导数 y'.

（1） $y=(1+\sin x)^x$；

（2） $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\ (x>4)$.

4. 求下列参数方程所确定的函数的导数.

（1） $\begin{cases}x=at^3,\\ y=bt^2,\end{cases}$ (a, b 为常数)； （2） $\begin{cases}x=1-\sin\theta,\\ y=\cos\theta.\end{cases}$

5. 求 $\begin{cases}x=\sin 2t,\\ y=\cos 3t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

6. 求下列函数的二阶导数.

（1） $y=2x^3+\cos x$； （2） $y=e^{2x+1}$；

（3） $y=x\sin x$； （4） $y=\ln(1+x)$.

【Matlab 应用】 复杂函数图像的绘制

绘图函数 ezplot 的调用方法如下.

（1） ezplot(f, [xmin, xmax]).

说明：f 是关于 x 的显式的符号表达式；绘图范围是 xmin≤x≤xmax.

（2） ezplot(f2, [xmin, xmax, ymin, ymax]).

示例 1　绘制参数方程$\begin{cases} x=4\sin t-3\sin\dfrac{4t}{3}, \\ y=4\cos t-3\cos\dfrac{4t}{3} \end{cases}$曲线图像.

新建脚本文件，输入指令：

```
syms t
fx=4*sin(t)-3*sin(4*t/3);
fy=4*cos(t)-3*cos(4*t/3);               %分别定义两个参数方程
ezplot(fx, fy, [0,6*pi])                %绘制参数方程对应的曲线
axis equal                              % x 轴与 y 轴等刻度
```

保存文件后运行，运行结果如图 2-11 所示.

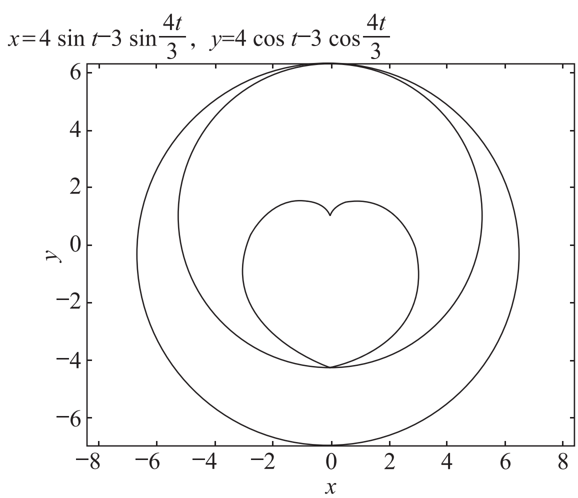


图 2-11

示例 2　绘制笛卡儿叶形线——“茉莉花瓣曲线”$x^3+y^3=3xy$ 的图像.

直接在命令行窗口输入下面指令：

```
syms x y
f=x^3+y^3-3*x*y;
ezplot(f, [-2 2 -2 2])
axis equal
```

按回车，运行结果，如图 2-12 所示.

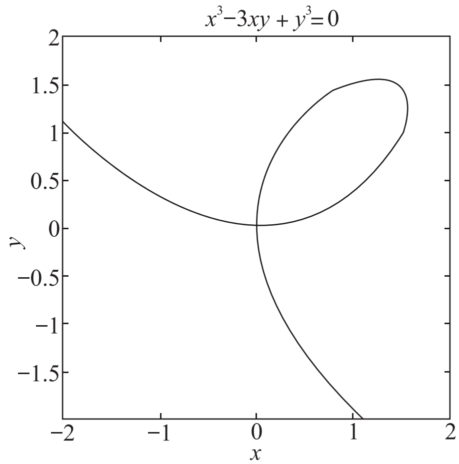


图 2-12

Matlab 视频

Matlab 绘制复杂函数图像

更多内容讲解请扫码观看.

2.4 函数的微分及其应用

微分的概念是微积分真正的核心. 在很多关于原因与结果、剂量与反应、输入与输出，或者其他类型的问题中，输入一个小的变化量 Δx，都会使输出产生一个小的变化量 Δy. 当我们把这个小的变化量利用结构化的方式组织起来时，就定义了微分.

2.4.1 微分的概念

1. 实例

边长为 x_0 的正方形金属薄片，由于受热膨胀，边长变成 $x_0+\Delta x$，如图 2-13 所示，问：此薄片的面积改变了多少?

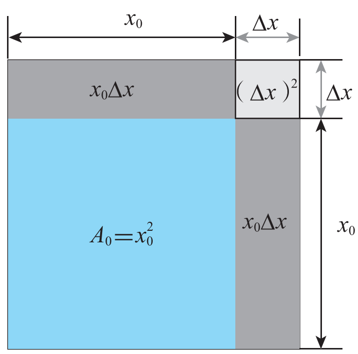


图 2-13

解：$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$.

即面积增加量由两部分组成.

第一部分：$2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性部分，为增量的主体部分；

第二部分：$(\Delta x)^2$ 是 Δx 的高阶无穷小，所以 $\Delta A\approx 2x_0\Delta x$（可用于近似计算）.

根据上面的实例，我们产生如下两个问题.

（1）是否所有函数的改变量都能在一定条件下表示为一个线性函数和一个高阶无穷小的和？

（2）这个线性部分是什么？如何求？

2. 微分的定义

定义 2.3　自变量在点 x 处的改变量记为 Δx，函数 $y=f(x)$ 相应的改变量记为 Δy. 当 $\Delta x\to 0$ 时，若

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，则称 $f(x)$ 在点 x 处可微，线性部分 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x 处的微分，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\Delta x.$$

由于 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，又在计算 Δy 中起主要作用，故称 $\mathrm{d}y=A\Delta x$ 为 Δy 的线性主部.

例 1　求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分.

解　$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2$.

上式可以看成由两部分组成，第一部分是具有 $A\Delta x$ 形式的 $2\Delta x$，第二部分是 $(\Delta x)^2$，它是 Δx 的高阶无穷小量. 因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0,$$

因此 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y=2\Delta x.$$

A 应该如何去求呢？在上面例子中 $A=2$，正好是 $y=x^2$ 在 $x=1$ 的一阶导数值，那么会不会 $A=f'(x)$ 呢？

3. 函数微分的计算

定理 2.6　函数 $y=f(x)$ 在点 x 可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x 可导，且有 $A=f'(x)$.

知识要点

由定理 2.6 可知，$dy=f'(x)dx$，即求函数的微分，只需要求函数的导数.

例 2 求当 x 由 1 变化到 1.01 时，函数 $y=x^3$ 的增量 Δy 及微分 dy.

解 函数 $y=x^3$ 的增量为

$$\Delta y=x^3-x_0{}^3=1.01^3-1^3=0.030301.$$

因为函数 $y=x^3$ 在任一点 x 处的微分为

$$dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x,$$

当 x 由 1 变化到 1.01 时，$\Delta x=0.01$，函数 $y=x^3$ 的微分为

$$dy\big|_{x=1,\Delta x=0.01}=3\times1^2\times0.01=0.03.$$

例 3 求下列函数的微分.

(1) $y=\sin(2x+1)$； (2) $y=e^{\sin(3x+2)}$.

解 (1) $dy=[\sin(2x+1)]'dx=2\cos(2x+1)dx$.

(2) $dy=[e^{\sin(3x+2)}]'dx=3e^{\sin(3x+2)}\cos(3x+2)dx$.

2.4.2 微分的几何意义

前面我们讨论了增量 Δx，微分 dy 和导数 $f'(x)$ 之间的关系，下面再从图形上直观地反映它们之间的关系.

如图 2-14 所示，MP 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线，设 MP 的倾角为 α，当自变量 x 有改变量 Δx 时，得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$.

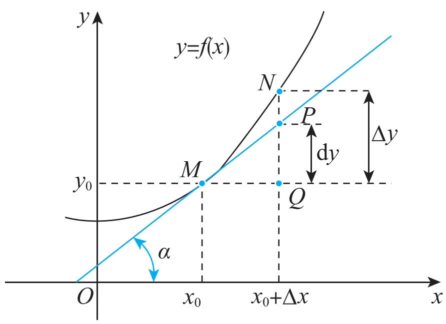


图 2-14

从图中可知，

$$MQ=\Delta x,\ QN=\Delta y.$$

则

$$QP=MQ\cdot\tan\alpha=f'(x_0)\Delta x,$$

即

$$dy=QP.$$

由此可知，微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 是当自变量 x 有改变量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线的纵坐标的改变量．用 dy 近似代替 Δy 就是用点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线纵坐标的改变量 QP 来近似代替曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的改变量 QN，并且有 $|\Delta y-dy|=PN$.

重难点视频
微分的几何意义

2.4.3 基本初等函数的微分公式和微分运算法则

因为函数 $y=f(x)$ 的微分等于导数 $f'(x)$ 乘 dx，所以根据导数公式和导数运算法则，就能得到相应的微分公式和微分运算法则.

1. 基本初等函数的微分公式

基本初等函数的微分公式如表 2-2 所示.

表 2-2

序号	基本导数公式	基本微分公式
(1)	$(c)'=0$	$d(c)=0$
(2)	$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$	$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx$
	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$d\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}dx$
	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$d(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$
(3)	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$
	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$
(4)	$(\arcsin x)'=(-\arccos x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x)=d(-\arccos x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
	$(\arctan x)'=(-\mathrm{arccot}\, x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x)=d(-\mathrm{arccot}\, x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$
(5)	$(a^x)'=a^x\ln a$	$d(a^x)=a^x\ln a\,dx$
	$(e^x)'=e^x$	$d(e^x)=e^x dx$
(6)	$(\sin x)'=\cos x$	$d(\sin x)=\cos x\,dx$
	$(\cos x)'=-\sin x$	$d(\cos x)=-\sin x\,dx$
	$(\tan x)'=\sec^2 x$	$d(\tan x)=\sec^2 x\,dx$

续表

序号	基本导数公式	基本微分公式
(6)	$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$
	$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$
	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$

2. 微分的四则运算法则

(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

(2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$;

(3) $\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$ (C 为常数);

(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq 0)$.

例 4 求函数 $y=2x^2+\ln x$ 的微分.

解 方法一，用微分运算法则：

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(2x^2+\ln x)=2\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}\ln x=4x\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\left(4x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

方法二，用微分定义：

$$y'=4x+\frac{1}{x},$$

所以

$$\mathrm{d}y=\left(4x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

例 5 求函数 $y=x^3\mathrm{e}^x$ 的微分.

解 方法一，用微分运算法则：

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^3\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x^3+x^3\mathrm{d}\mathrm{e}^x=3x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x(3+x)\mathrm{d}x.$$

方法二，用微分定理：

$$y'=3x^2\mathrm{e}^x+x^3\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x(3+x),$$

所以

$$\mathrm{d}y=x^2\mathrm{e}^x(3+x)\mathrm{d}x.$$

例 6 求函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$的微分.

解 方法一，用微分运算法则：

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{x\mathrm{d}\sin x-\sin x\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

方法二，用微分定理：

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

$$\mathrm{d}y=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

3. 复合函数的微分法则

定理 2.7　设 $y=f(u),u=\varphi(x)$ 均可微，则 $y=f[\varphi(x)]$ 也可微，且

$$\mathrm{d}y=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$，上式也可写为

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

根据微分的定义，当 u 是自变量时，函数 $y=f(u)$ 的微分是

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

由此可见，不论 u 是自变量还是函数（中间变量），函数 $y=f(u)$ 的微分总保持同一形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$，这一性质称为一阶微分形式不变性. 有时，利用一阶微分形式不变性求复合函数的微分比较方便，且不容易出错.

例 7　设 $y=\cos\sqrt{x}$，求 $\mathrm{d}y$.

解　方法一，用公式 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，得

$$\mathrm{d}y=\left(\cos\sqrt{x}\right)'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

方法二，用一阶微分形式不变性，得

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\cos\sqrt{x}\right)=-\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}=-\sin\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

例 8　设 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$，求 $\mathrm{d}y$.

解　方法一，用公式 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，得

$$\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{\sin x})'\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x.$$

方法二，用一阶微分形式不变性，得

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sin x}=\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}\sin x=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x.$$

素质广角

函数的微分具有很多重要的性质，微分形式不变性便是其中之一. 通过一阶微分形式不变性知道，无论将 u 看成中间变量还是看成自变量，函数的微分形式是不变的. 它的妙处在于能够避开函数变量错综复杂的关系，直击函数微分的本质：一方面

是可以不用区分变量，直接利用一元函数的微分性质计算；另一方面是不用区分变量是自变量、因变量还是中间变量，以及它们的结构问题就可以利用微分性质直接计算.

学会透过现象看本质，善于从复杂局面中抓住问题的关键，正如习近平总书记在党的二十大报告中指出："我们要善于通过历史看现实、透过现象看本质，把握好全局和局部、当前和长远、宏观和微观、主要矛盾和次要矛盾、特殊和一般的关系，不断提高战略思维、历史思维、辩证思维、系统思维、创新思维、法治思维、底线思维能力，为前瞻性思考、全局性谋划、整体性推进党和国家各项事业提供科学思想方法."

2.4.4 微分在近似计算中的应用

近似计算是科技工作常遇到的问题，用什么公式作近似计算？由于微分 dy 是 Δy 的线性主部，当 $\Delta x \to 0$ 时，$dy \sim \Delta y$，所以在近似计算中，可以用 dy 代替 Δy. 当 $|\Delta x|$ 很小时，我们有近似公式

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

或

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

重难点视频
函数的微分

知识要点

微分近似计算步骤：

(1) 根据题意，确定 $y=f(x)$，x_0，Δx；

(2) 求出 $f'(x)$，$f(x_0)$，$f'(x_0)$；

(3) 利用公式 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ 或 $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ 计算.

例 9 计算 $f(x) = \arctan 1.05$ 的近似值.

解 设 $f(x) = \arctan x$，取 $x_0 = 1$，$\Delta x = 0.05$，

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},\ f'(1) = \frac{1}{2}.$$

由公式可知

$$\arctan 1.05 \approx f(1) + f'(1) \times \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{0.05}{2} \approx 0.810.$$

学以致用

如果某个量的精确值为 A，它的近似值为 a，那么 $|A-a|$ 称为近似值 a 的绝对误差，而 $\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 称为近似值 a 的相对误差.

多次测量一根圆钢截面直径，其值分别为 49.9 mm、49.8 mm、50.0 mm、50.1 mm、50.2 mm、50.2 mm、50.0 mm、49.8 mm，已知测量仪器的绝对误差不超过 0.04 mm，试计算该圆钢截面面积，并估算其误差.

解：用 D 表示圆钢截面的直径，S 表示圆钢截面的面积，圆钢截面的直径的近似值为已知 8 组数据直径的平均值，$D\approx 50$ mm，$\Delta D=0.04$ mm.

所以圆钢截面面积的近似值为 $S=\pi\cdot\dfrac{D^2}{4}\approx 1962.5\ (\mathrm{mm}^2)$.

绝对误差：$\Delta S\approx \mathrm{d}S=\pi\cdot\dfrac{D}{2}\cdot\Delta D=3.14\ (\mathrm{mm}^2)$.

相对误差：$\dfrac{\Delta S}{S}\approx\dfrac{3.14}{1962.5}\approx 0.16\%$.

本节自测2.4

1. 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处，当 Δx 为 0.1 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$；　　(2) $y=x\sin 2x$；

(3) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$；　　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(5) $y=\ln(1+x^2)$；　　(6) $y=\arcsin \mathrm{e}^x$.

3. 在下列括号中填入适当的函数，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad)=3\mathrm{d}x$；　　(2) $\mathrm{d}(\quad)=3x^2\mathrm{d}x$；

(3) $\mathrm{d}(\quad)=\sin x\mathrm{d}x$；　　(4) $\mathrm{d}(\quad)=\cos 2x\mathrm{d}x$；

(5) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{2+x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$；

(7) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(8) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 2x\mathrm{d}x$.

4. 在下列函数的近似值.

（1） $\sin 29^{\circ}$；　　　　（2） $\sqrt[3]{997}$.

【Matlab 应用】 微分运算

示例　求函数 $y=\ln \sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$，$\Delta x=0.001$ 时的微分.

在命令行窗口输入指令：

```
>> syms x;
>> f=log(sin(x));            %定义函数
>> f1=diff(f);               %求导函数
>> x=pi/4;
>> df=eval(f1)*0.001         %求微分
```

按回车键，得到运行结果：

```
df =
1.0000e-03
```

Matlab 视频
Matlab 微分运算

更多内容讲解请扫码观看.

本章测验

1. 选择题.

（1）设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-3h)}{h}$（　　）.

A. $f(x_0)$　　B. $f'(x_0)$　　C. $3f'(x_0)$　　D. $\dfrac{1}{3}f'(x_0)$

（2）设 $y=\sin^3\dfrac{x}{3}$，则 $y'=$（　　）.

A. $3\sin^2\dfrac{x}{3}$　　B. $\sin^2\dfrac{x}{3}$

C. $3\sin^2\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$　　D. $\sin^2\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$

（3）设 $y=\ln(1+2x)$，则 $y''=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{(1+2x)^2}$　　B. $\dfrac{2}{(1+2x)^2}$

C. $-\dfrac{4}{(1+2x)^2}$　　D. $\dfrac{4}{(1+2x)^2}$

（4）隐函数 $x^2-y^2=1$ 的导数是 $y'=$（　　）.

A. $y'=\dfrac{x}{2y}$　　B. $y'=\dfrac{x}{y}$

C. $y'=-\dfrac{x}{y}$　　D. $y'=\dfrac{y}{x}$

（5）下列函数中，微分等于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ 的是（　　）.

A. $x\ln x+C$　　B. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$

C. $\dfrac{\ln x}{x}+C$　　D. $\ln(\ln x)+C$

2. 填空题.

（1）已知函数 $f(x)=x(1-x)(3-x)$，则 $f'(0)=$________.

（2）已知函数 $y=x\ln x$，则 $y'|_{x=e}=$________.

（3）设 $y=\sin x$，则 $y''=$________.

（4）设函数 $y=2x^2$，已知其在点 x_0 处自变量增量 $\Delta x=0.3$ 时，对应函数增量 Δy 的

线性主部为−0.6，则 $x_0=$________.

3. 计算题.

（1）$y=\arctan 2x+\dfrac{\sin x-x}{x}$，求 y'.

（2）设$\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=e^{2t}+t,\end{cases}$求 y'.

（3）设 $y=\tan(2x)$，求 dy.

（4）讨论$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处的连续性和可导性.