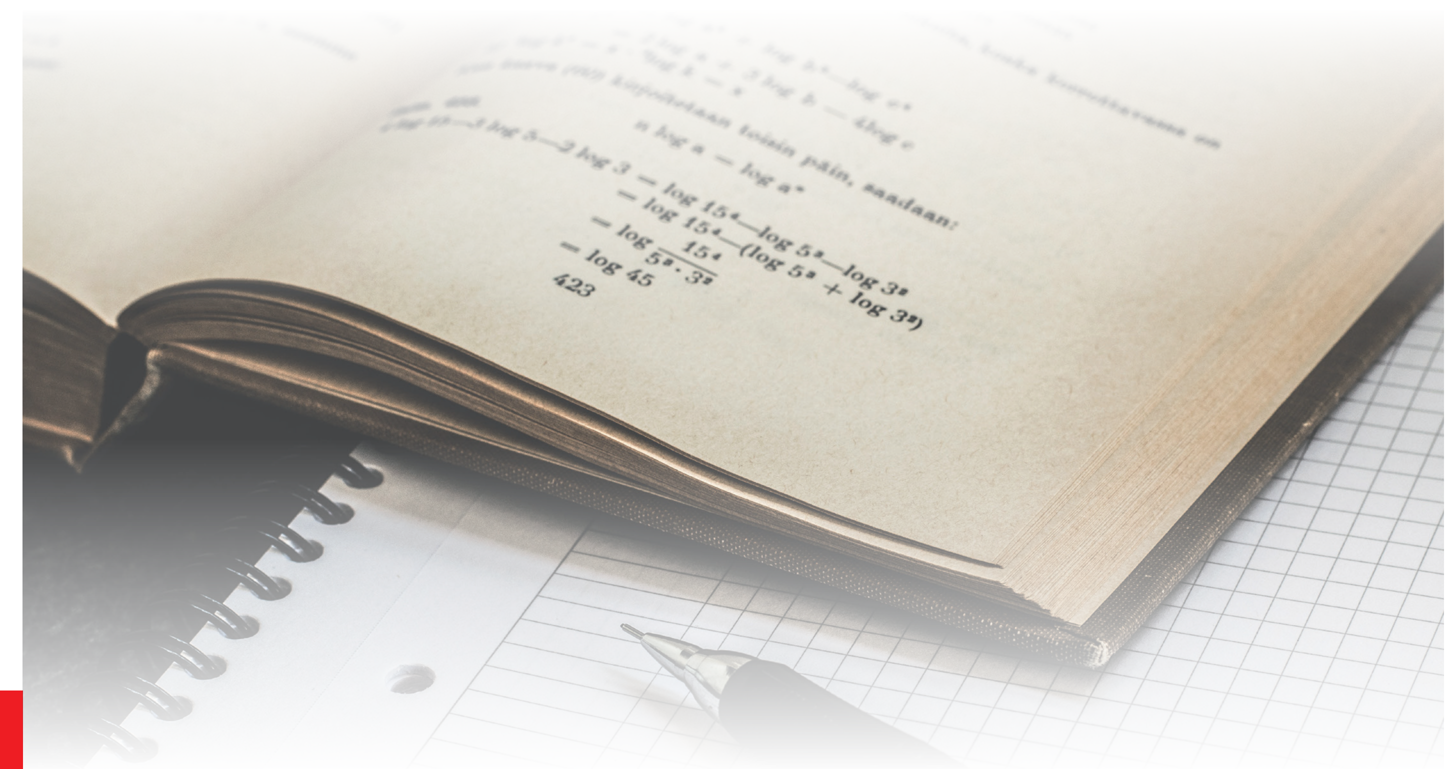
“十四五”职业教育国家规划教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

（理工类）

张秀英　李　静　主编



- 教学课件
- 电子教案
- 考试题库

中原出版传媒集团
中原传媒股份公司
河南科学技术出版社

『十四五』职业教育国家规划教材
高等数学（理工类）
张秀英　李　静　主编
河南科学技术出版社

立体化教材使用指南（扫描过程中禁止移动）

打开扫码　扫描书中二维码　播放视频

总 策 划　李喜婷　马国宝
策划编辑　马国宝
责任编辑　张春龙　马国宝
责任校对　司丽艳
封面设计　张　伟
责任印制　张艳芳

中原出版
CENTRAL CHINA PUBLISH

ISBN 978-7-5725-0072-5

定价：49.80 元

“十四五”职业教育国家规划教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

（理工类）

张秀英　李　静　主编

河南科学技术出版社
·郑州·

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学：理工类/张秀英,李静主编.—郑州:河南科学技术出版社,2020.9(2024.8 重印)

ISBN 978-7-5725-0072-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②李… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 143962 号

**出版发行**:河南科学技术出版社

地址:郑州市郑东新区祥盛街 27 号　　邮政编码:450016

电话:(0371)65788641　65788859

网址:www.hnstp.cn

**总 策 划**:李喜婷　马国宝

**策划编辑**:马国宝

**责任编辑**:张春龙　马国宝

**责任校对**:司丽艳

**封面设计**:张　伟

**责任印制**:张艳芳

**印　　刷**:河南日报报业集团大河印刷有限公司

**经　　销**:全国新华书店

**开　　本**:787 mm×1 092 mm　1/16　　**印张**:22　　**字数**:535 千字

**版　　次**:2020 年 9 月第 1 版　　2024 年 6 月修订　　2024 年 8 月第 6 次印刷

**定　　价**:49.80 元

# 前言

PREFACE

《高等数学(理工类)》是顺应“互联网+”的发展趋势,推进信息技术与教育教学的全面深度融合而建成的一本立体化教材.

本教材的编者均来自高职数学教学一线,具有丰富的教学实践经验,体现了“理实一体”“线上线下”“课程思政”等新的教育教学理念,实现了培养应用型技术人才的培养目标.将传统纸质教材与声音、视频、动漫等数字化资源有机结合,形成了融信息技术于一体的立体化教材.

本教材共十个单元,主要内容包括:函数和极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、线性代数初步、微分方程、无穷级数、多元函数微积分、Matlab 数学实验.本教材可以作为高职高专院校公共基础课教材,也可作为广大青年朋友学习的参考书.

本教材具有以下特色:

1.注重“结构模块化”.本教材分为五个模块,即一元函数微积分基础篇、线性代数初步篇、应用篇、拓展篇、数学实验篇.

2.注重“内容任务化”.依据任务驱动教学理念,采用反向教学设计,每一单元按照“任务提出→引例→归纳数学知识→知识应用→任务解决(结合 Matlab 软件)→数学建模→数学文化(课程思政)”进行编写.

3.注重“形式立体化”.本教材相应知识点旁边配有二维码,学生可以通过扫一扫的方式观看相应微视频.同时在“爱课程·中国大学慕课”平台上配套建成了《高等数学(理工类)》精品在线开放课程,力图为学生打造立体化的学习空间.

4.注重“专业融合”.突出数学知识与专业应用的结合,每一单元的任务、案例尽可能贴近生活、结合专业,做到“浅显易懂,深入浅出,引人入胜”.如“导数与微分”这一单元,用买房贷款作为任务驱动;“定积分及其应用”这一单元,用电学中的“谐波分析”作为任务驱动等.既体现了数学的实用性,又体现了趣味性.

5.注重“理实一体”.将 Matlab 软件和数学建模案例融入每一单元,注重数学工具软件的使用和“用数学”的理念,“理实一体”既提高学生“用数学”解决实际问题的能力,又培养学生的创新意识和创新能力.

6.注重“课程思政”.每单元都选取数学史、数学文化等内容,并挖掘数学概念中蕴含的哲学道理,编入教材中,潜移默化实现课程思政.

本教材由张秀英、李静担任主编,张媛、余敏、徐玉春担任副主编.编者具体分工如下:第1单元,张媛;第2、5单元,徐玉春;第3单元,张秀英;第4单元,余敏;第6单元,周素静;第7、8单元,李静;第9单元,赵豪杰;第10单元及前面各章中的数学实验,李海燕.

本教材在编写过程中得到了郑州铁路职业技术学院、河南工业贸易职业学院的大力支持,在此表示衷心的感谢!同时我们参阅了同行许多新的研究成果,在此一并表示感谢!

由于编者水平有限,书中难免有不足之处和错误,恳请广大读者提出宝贵的意见和建议,以便修订时加以完善.

**编者**

2024年6月

# 目录

$$\int \cos 2x\mathrm{d}x \xlongequal{\text{凑微分}} \frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x) \xlongequal{\text{令 }2x=u\text{ 换元}} \frac{1}{2}\int \cos u\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{\text{求积分}} \frac{1}{2}\sin u + C \xlongequal{\text{用 }u=2x\text{ 回代}} \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

# 模块一 一元函数微积分基础篇

# 单元 1　函数和极限

## 单元概要

高等数学的核心是微积分及其应用.微积分是科学史上的重大发明,它在物理学、天文学、工程技术、经济学、管理学及生物学等领域的应用都十分广泛.函数是微积分研究的基本对象,极限是研究微积分的基本概念和重要工具,极限的思想方法贯穿整个高等数学.

本单元首先提出任务,之后将介绍初等函数的概念,学习极限和连续的概念以及相关应用,并学习 Matlab 数学软件的基本操作,了解用 Matlab 软件求极限,然后利用这些知识解决本单元提出的任务.

## 单元目标

**知识目标**:理解函数的概念,掌握基本初等函数及其特性;掌握复合函数的分解,会求初等函数的定义域;理解极限的概念,掌握极限的计算方法;理解函数连续的概念,会判断函数在指定点处的连续性,会求初等函数的连续区间;了解闭区间上连续函数的性质.

**能力目标**:能应用函数和极限解决简单的实际问题;能用 Matlab 数学软件求极限.

**素质目标**:培养学生的数学思维、数学应用能力;培养学生的数学素养;培养学生的创新精神.

## 任务提出

### 任务一　【哪一家公司费用较便宜】

甲、乙两家出租车公司,已知甲出租车公司提供的汽车每天租金 320 元,每千米的附加费用为 1.2 元;其竞争对手乙出租车公司提供的汽车每天租金 400 元,每千米的附加费用为 0.8 元.如何判断哪一家公司费用较便宜?

### 任务二　【贷款的还款总额】

某厂家 2019 年 2 月 15 日购买了一台生产设备,向银行贷款 100 万元,以复利计息,年利率为 8%,2029 年 2 月 15 日到期一次性还本付息.若按连续复利计算,试确定贷款到期时的还款总额.

### 任务三　【圆的面积】

设圆的半径为 $r$,试用“割圆法”证明圆的面积公式 $S_{圆}=\pi r^2$.

## 单元知识

# 1.1　函数

### 引　例

**引例 1**　半径为 $r$ 的圆的面积为 $S=\pi r^2$.随着半径 $r$ 的变化,面积 $S$ 也随之变化,因此,在该问题中,$r$ 和 $S$ 都是变量.当 $r$ 取定某一数值时,则 $S$ 也随之有一个确定的数值与之对应,如 $r=1$ cm 时,$S\approx 3.14$ $\text{cm}^2$.

**引例 2**　工商银行的人民币整存整取定期储蓄,2019 年调整后的存期与年利率如表 1.1 所示.

**表 1.1**

| 存期 | 三个月 | 半年 | 一年 | 二年 | 三年 | 五年 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 年利率(%) | 1.35 | 1.55 | 1.75 | 2.25 | 2.75 | 2.75 |

观察引例 1 中半径 $r$ 与面积 $S$ 的关系,引例 2 中存期与年利率的关系,虽然两例的实际意义、表示形式都不相同,但具有共同之处:一个变量的值取决于另一个变量的值,或者说一个量的变化会引起另一个量的变化,函数关系就是描述这种联系的一个法则.

## 1.1.1　函数的概念

函数的定义

1.函数的定义

某一变化过程中可以取不同数值的量叫变量,而始终保持相同数值的量叫常量.

变量与变量之间经常是相互依赖、相互制约的,一个变量的变化会引起另一个变量随之发生变化,这两个量之间就有了函数关系.

例如,球的体积和球半径的关系,大气压强和海拔高度的关系,放射性物质的质量和时间的关系,个人所得税的应纳税额和收入的关系等,每一个问题中的两个变量之间都有着函数关系.

**定义 1.1**　设 $x,y$ 是两个取实数值的变量,$x$ 取值的集合是非空集 $D$.如果按照某个对应法则 $f$,对于 $D$ 中的每一个 $x$ 的值,都有唯一确定的 $y$ 值和它对应,那么就称 $y$ 是 $x$ 的函数,记作 $y=f(x)$,称 $x$ 是自变量,$y$ 是因变量,$D$ 是函数的定义域,与 $x$ 值相对应的 $y$ 值叫作函数值,函数值的集合叫作函数的值域.

函数的记号除 $f(x)$ 外,还常用 $F(x)$、$G(x)$、$Q(p)$、$S(p)$、$L(q)$、$C(q)$ 等记号来表示.

许多年前,瑞士数学家欧拉(1707—1783)首创了一种符号来表示"$y$ 是 $x$ 的函数":$y=f(x)$.当 $x_0\in D$ 时,函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

**小贴士**

上面定义的函数也叫作单值函数,定义要求"对于 $D$ 中的每一个 $x$ 的值,都有唯一确定的 $y$ 值和它对应".如果把这句话中的"唯一"二字去掉,并修改为"对于 $D$ 中的每一个 $x$ 的值,都有确定的 $y$ 值和它对应,并且至少有一个 $x$ 值与多个 $y$ 值相对应",那么这样定义的函数叫作多值函数.

例如,方程 $y^2=x$,对于 $[0,+\infty)$ 上的每一个 $x$ 值,$y$ 都有确定的值和它对应,并且对任意一个大于零的 $x$,都有两个 $y$ 值:$y_1=\sqrt{x}$ 和 $y_2=-\sqrt{x}$ 与 $x$ 相对应.所以这个方程确定了一个以 $x$ 为自变量、$y$ 为因变量的多值函数.

说明:本书对多值函数不作讨论,以后说到函数,若无特别声明,都指单值函数.

2.函数的表示法

函数的表示方法,常用的有三种,即公式法(又称解析法)、表格法和图象法.

例如,$y=4x^3+2\ln x$ 就是用公式法表示的函数;我们的成绩单、银行的存款利率表、财务报表等用的都是表格法;股市的综合指数即时图、医院心电监护仪屏幕上显示的患者心电图等就是用图象法表示出来的函数关系.

**小贴士**

函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 是自变量 $x$ 的取值范围.函数关系 $y=f(x)$ 实质上是由其定义域 $D$ 和对应法则 $f$ 所确定的.求函数定义域时,一般需要考虑以下几个方面:

(1)分式函数分母不能为零;

(2)开偶次方时,被开方部分非负;

(3)对数函数,真数大于零.

若函数同时含有以上几种情况,则取其交集.

**例 1** 已知函数 $f(x)=\dfrac{2+x}{\sqrt{3-x}}$,求:(1)$f(x)$ 的定义域;(2)$f(-1)$,$f(x+1)$.

**解** (1)要使函数有意义,需满足 $3-x>0$,即 $x<3$,故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,3)$.

(2)$f(-1)=\dfrac{1}{2}$,$f(x+1)=\dfrac{3+x}{\sqrt{2-x}}$.

3.分段函数

在定义域的不同范围内,由不同公式表示的函数关系叫作分段函数.

例如,绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是分段函数,它的图象如图 1-1 所示.

再如,某网络运营商的 4G 手机上网流量包,每月 30 元,包 500 M 国内流量,超出 500 M 后按 0.29 元/M 收费.如果用 $t$ 表示每月上网使用的流量(单位:M),$y$ 表示上网费用,则有

$$y=\begin{cases}30, & 0\leqslant t\leqslant 500,\\ 30+0.29(t-500), & t>500.\end{cases}$$

这个函数的图象如图 1-2 所示.

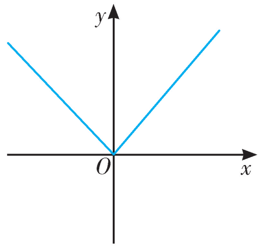



图 1-1

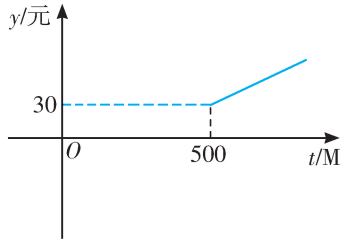



图 1-2

### 1.1.2　函数的基本性质

函数的单调性、奇偶性、周期性，这三种特性在中学已有详细描述，此处不再介绍，下面说明有界性.

设函数 $y=f(x)$ 在数集 $D$ 上有定义，如果存在一个正数 $M$，对 $D$ 中的任一 $x$，相应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$，那么称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上是有界的，也说 $f(x)$ 是 $D$ 上的有界函数；如果不存在这样的正数 $M$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上是无界的，也说 $f(x)$ 是 $D$ 上的无界函数.

例如，对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$\left|2\cos\frac{1}{3}x\right|\leqslant 2$，所以 $y=\sin x$、$y=2\cos\frac{1}{3}x$ 在它们的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上都是有界函数；而函数 $y=2x^3-x$ 在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数.

当函数 $y=f(x)$ 在数集 $D$ 上有界时，它在 $D$ 上的图象一定在两条平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

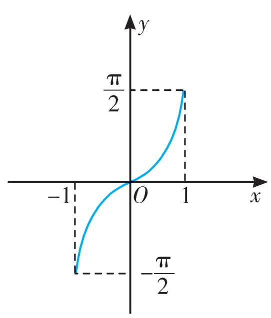
### 1.1.3　初等函数

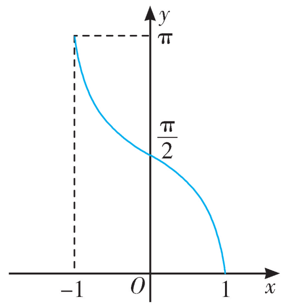
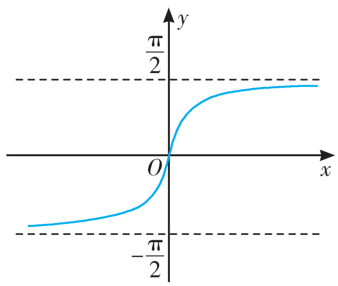
1.基本初等函数

常值函数 $y=C$（$C$ 为常数）、幂函数 $y=x^\alpha$、指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）、三角函数 $y=\sin x$，…，$y=\csc x$ 以及反三角函数 $y=\arcsin x$，…，$y=\arctan x$，这六大类函数称为基本初等函数.

在此给出三个常用的反三角函数的图象及性质，见表 1.2，其他几类基本初等函数的图象及特性不再一一列出.

**表 1.2**

| 函数及其定义域、值域 | 图　象 | 特　性 |
|---|---|---|
| $y=\arcsin x$<br>定义域：$[-1,1]$<br>值域：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ |  | 奇函数<br>单调增加<br>有界 |

| | | |
|---|---|---|
| $y=\arccos x$<br>定义域:$[-1,1]$<br>值域:$[0,\pi]$ |  | 单调减少<br>有界 |
| $y=\arctan x$<br>定义域:$(-\infty,+\infty)$<br>值域:$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ |  | 奇函数<br>单调增加<br>有界 |

2.复合函数

复合函数

设函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$,$u=\varphi(x)=x^2+1$,把 $u=\varphi(x)=x^2+1$ 代入 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 中,就得到了一个新的函数 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{x^2+1}$.得到这个函数的过程叫作函数的复合过程,这个函数叫作 $x$ 的复合函数.

**定义 1.2**　设 $y$ 是 $u$ 的函数,即 $y=f(u)$,其定义域为 $A$.$u$ 又是 $x$ 的函数,即$u=\varphi(x)$,其值域为 $B$.如果 $A\cap B\neq\varnothing$,那么称以 $x$ 为自变量的函数 $y=f[\varphi(x)]$为由$y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,$x$ 是自变量,$u$ 称为中间变量.

**小贴士**

必须注意,并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数.例如,函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=-x^2-1$就不能复合成 $y=\sqrt{-x^2-1}$,因为函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $A$ 为$[0,+\infty)$,函数 $u=-x^2-1$的值域 $B$ 为$(-\infty,-1]$,不符合条件 $A\cap B\neq\varnothing$.

复合函数的概念可以推广到两个以上函数复合的情况.例如,函数 $y=3^{\sqrt{2x-1}}$是由$y=3^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=2x-1$ 三个函数复合而成,其中 $u$,$v$ 都是中间变量,$x$ 为自变量.复合函数 $y=3^{\sqrt{2x-1}}$的定义域为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

研究复合函数时,有时需要把几个函数复合成为一个函数,有时又要弄清一个复合函数是由哪几个简单函数复合而成的.这里说的简单函数是指基本初等函数,以及由它们的和、差、积、商所构成的函数.

**例 2**　说出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的,并说出其定义域:

(1) $y=\ln\sqrt{x+1}$;　　　　(2) $y=\sin^2(2x-3)$.

**解**　(1) 函数 $y=\ln\sqrt{x+1}$ 可以看成是由简单函数 $y=\ln u, u=\sqrt{v}$ 和 $v=x+1$ 复合而成的,定义域为 $(-1,+\infty)$.

(2) 函数 $y=\sin^2(2x-3)$ 可以看成是由简单函数 $y=u^2, u=\sin v$ 和 $v=2x-3$ 复合而成的,定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

注意:求复合函数的定义域时,要考虑其复合过程中各简单函数的定义域.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合步骤而构成的,并能用一个数学式子表示的函数叫初等函数.

例如,复合函数 $y=\sin^3 x$,多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,有理函数 $y=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ 等都是初等函数.而

$$f(t)=\begin{cases}30, & 0\leqslant t\leqslant 500,\\ 30+0.29(t-500), & t>500\end{cases}$$

不能用一个式子表示,不是初等函数.

## 知识应用

**案例 1【外币兑换】**　按某个时期的汇率,若将美元兑换成加拿大元,币值增加 12%;而将加拿大元兑换成美元,币值减少 12%.今有一美国人准备到加拿大度假,他将一定数额的美元兑换成了加拿大元,但后来因故未能成行,于是他又将加拿大元兑换成了美元.经过这样一来一回的兑换,结果白白亏损了一些钱.这是为什么呢?

**解**　设 $x$ 美元可兑换 $y=f_1(x)$ 加拿大元,$y$ 加拿大元可兑换 $x=f_2(y)$ 美元,则

$$y=f_1(x)=x+0.12x=1.12x,$$
$$x=f_2(y)=y-0.12y=0.88y.$$

而 $f_2(f_1(x))=0.88\times1.12x=0.9856x$,$\dfrac{0.9856x-x}{x}\times100\%=-1.44\%$,即他亏损了1.44%.

**案例 2【企业所得税】**　我国关于企业所得税的计税规定如下:全年应纳税所得额大于 10 万元的,企业所得税税率为 33%;应纳税所得额 3~10 万元(含 10 万元)的,税率为 27%;应纳税所得额 3 万元(含 3 万元)以下的,税率为 18%,应纳税额=税率×计税所得额.试列出企业应纳税额与计税所得额之间的函数关系.

**解**　设企业计税所得额为 $x$ 万元,应纳税额为 $y$ 万元,则其函数关系为

$$y=\begin{cases}0.18x, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0.27x, & 3<x\leqslant 10,\\ 0.33x, & x>10.\end{cases}$$

$y$ 是一个分段函数.由于它不能用一个式子表示,因此它不是初等函数.

**能力训练1.1**

1.求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{5-x}$; (2) $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$;

(3) $y=\sqrt{3^x-1}$; (4) $y=\sqrt{\ln(x-2)}$;

(5) $y=\dfrac{x-4}{x^2-2x-8}$; (6) $y=e^{\frac{1}{x}}$;

(7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$; (8) $y=\arcsin(2x+1)$;

(9) $y=\dfrac{\ln(x^2-1)}{2-x}$; (10) $y=(3-x)^{\frac{1}{4}}+(x+5)^{-\frac{1}{2}}$;

(11) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; (12) $y=2^{\frac{1}{x-1}}+\sqrt{3^x-1}$.

2.设 $f(x)=\begin{cases}3, & x<0,\\ x^2-1, & 0\leqslant x<1,\\ 1-x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 画出函数 $y=f(x)$ 的图象,并求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(5)$、$f(f(0.5))$ 和 $f(f(-1))$ 的值.

3.判断下列函数是奇函数、偶函数,还是非奇非偶函数:

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$; (2) $f(x)=e^x-e^{-x}$;

(3) $f(x)=x^5\arctan x$; (4) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+10)$;

(5) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{2+\cos x}$; (6) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

4.说出下列函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y=\sin^3 x$; (2) $y=\cos x^2$;

(3) $y=\sqrt[3]{3x^2-2}$; (4) $y=(x^2+1)^5$;

(5) $y=\ln\arctan\dfrac{x}{2}$; (6) $y=\arcsin\sqrt{x+1}$;

(7) $y=e^{\cos^3 x}$; (8) $y=\cos\left(\ln\dfrac{x-1}{x+1}\right)$;

(9) $y=\tan^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; (10) $y=\ln[\ln(\ln x)]$.

5.某运输公司规定货物的吨公里运价为:在 300 km 以内,单价 5 元/km,超过部分为 4 元/km.求运价 $p$ 和里程 $s$ 之间的函数关系.

## 1.2 极限的概念

极限是研究变量变化趋势的基本工具,它是学习和研究微积分的重要工具.微积分中许多重要的概念,如连续、导数、定积分等都是用极限来定义的.极限有两大类:一类是数列的极限,另一类是函数的极限.下面我们将分别讨论.

## 引　例

**引例 1【割圆术】**　我国魏晋时期的刘徽注解《九章算术》提出了“割圆术”，利用圆的内接正多边形来推算圆的面积.“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”这就是极限思想在几何学上的应用.

割圆术

**分析**　首先，作圆内接正六边形，其面积记为 $A_1$；再作圆内接正十二边形，其面积记为 $A_2$；再作圆内接正二十四边形，其面积记为 $A_3$；……继续下去，每次边数加倍，这样就得到一系列圆内接正多边形的面积：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

它们构成一个数列.当 $n$ 越大，圆内接正多边形的面积与圆的面积之差就越小，当 $n$ 无限增大时，圆内接正多边形的面积就无限接近圆的面积.

**引例 2【一尺之棰】**　庄子在《天下篇》中记载：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”这一说法与事实相符吗？

**分析**　假设木棰的长度为 1 尺，天数为 $n$，从第一天开始，每天取前一天的一半，将第一天余下木棰的长度，第二天余下木棰的长度，……，第 $n$ 天余下木棰的长度表示成下面的数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \cdots$$

可以看出，随着 $n$ 的无限增大，剩下的木棰长度越来越短，甚至接近于 0.这说明“万世不竭”（即木棰的长度永远不会为 0）是与事实不符的.

上述两个例子都是研究数列项数无限增加时的变化趋势，即数列的极限.

### 1.2.1　数列的极限

1.数列

按一定顺序排列的无穷多个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 称为无穷数列，简记作 $\{x_n\}$.其中，$x_1$ 叫作数列的第 1 项（也称为首项），$x_2$ 叫作数列的第 2 项，……，$x_n$ 叫作数列的第 $n$ 项，又称为通项或一般项.例如：

(1) $1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots$；

(2) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \cdots, (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}, \cdots$；

(3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$；

(4) $1, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^3}, \cdots, \frac{1}{n^3}, \cdots$.

它们都是数列.

2.数列的极限

数列可以看作是定义在正整数集合上的函数.$n$ 取正整数且无限增大时，记作 $n\to\infty$，读作“$n$ 趋向于无穷大”.

数列的极限

**定义 1.3**　设$\{x_n\}$是一个无穷数列,如果当$n\to\infty$时,$x_n$无限趋近于一个常数$A$,则称当$n$趋向于无穷大时,数列$\{x_n\}$的极限为$A$,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\ 或\ x_n\to A(n\to\infty).$$

数列有极限时,称它收敛,否则称它发散.

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0(q\ 为常数,且|q|<1),\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha\ 是正常数).$$

例如,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$等.

下面是一个判定数列极限存在的法则,称为单调有界原理.

单调有界数列必有极限.

### 1.2.2　函数的极限

1.$x\to\infty$时$f(x)$的极限

$x\to+\infty$表示$x$无限增大,读作“$x$趋向于正无穷大”;$x\to-\infty$表示$x$沿$x$轴负方向取值且$x$绝对值无限增大,读作“$x$趋向于负无穷大”;$x\to\infty$,表示$|x|$无限增大,读作“$x$趋向于无穷大”.

$x\to\infty$时函数极限的定义

**定义 1.4**　设函数$y=f(x)$,如果当$x\to\infty$时,$f(x)$无限趋近于一个常数$A$,那么就说$A$是当$x$趋向于无穷大时函数$f(x)$的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,或\ f(x)\to A(x\to\infty).$$

例如,从图 1-3 和图 1-4 可以看出$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

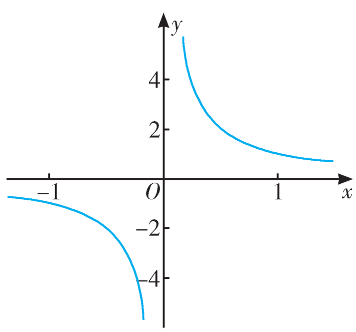



图 1-3

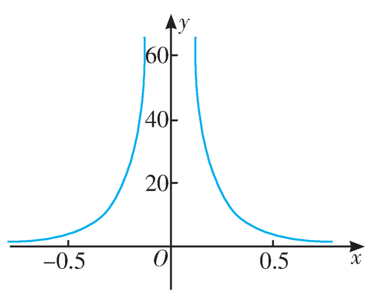



图 1-4

一般地,如果$q$是一个正有理数,那么有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^q}=0$.

**定义 1.5**　设函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 无限趋近于一个常数 $A$，那么就说 $A$ 是当 $x$ 趋向于正无穷大时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A，或 f(x)\to A(x\to+\infty).$$

如果当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 无限趋近于一个常数 $A$，那么就说 $A$ 是当 $x$ 趋向于负无穷大时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A 或 f(x)\to A(x\to-\infty).$$

由定义 1.4 和定义 1.5 可知：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例如，观察图 1-3 可以看到，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

又如，观察指数函数的图象可以看出，当 $0<a<1$ 时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$；当 $a>1$ 时，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$.

容易知道，$\lim\limits_{x\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

**例 1**　考察 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

**解**　由图 1-5 可以看出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 虽然都存在，但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

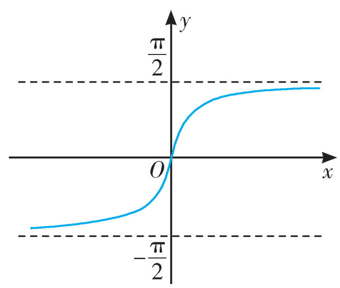


图 1-5

从图象上看，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ 表明，当 $x\to+\infty$ 时，曲线 $y=\arctan x$ 上的点无限接近于水平直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$ 表明，当 $x\to-\infty$ 时，曲线 $y=\arctan x$ 上的点无限接近于水平直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$. 直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 都叫作曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

**定义 1.6**　一般地，设函数 $y=f(x)$，如果

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b 或 \lim_{x\to-\infty}f(x)=b,$$

那么就称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

例如，由 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$ 可知，$y=0$ 是曲线 $y=2^x$ 的一条水平渐近线；又如，由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 可知，$y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条水平渐近线.

2.$x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

设 $\delta$ 为正实数,称区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域,点 $x_0$ 称为邻域中心,$\delta$ 称为邻域半径,$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 $x_0$ 的去心 $\delta$ 邻域.设 $x_0$ 是一个定值,$x$ 从 $x_0$ 的两侧以任何方式趋近于 $x_0$,但始终不等于 $x_0$,用"$x\to x_0$"表示,读作"$x$ 趋向于 $x_0$".

(1)$x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限.

**例 2**　考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 当 $x\to 2$ 时的变化趋势.

**解**　当 $x\neq 2$ 时,$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$.

在 $x=2$ 的左侧,观察表 1.3.

**表 1.3**

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | … | → | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | … | → | 4 |

在 $x=2$ 的右侧,观察表 1.4.

**表 1.4**

| $x$ | 2.1 | 2.01 | 2.001 | … | → | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4.1 | 4.01 | 4.001 | … | → | 4 |

由以上讨论可知:当 $x\to 2$($x$ 不论从 2 的左侧还是右侧都趋向于 2)时,函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的值无限接近常数 4.

$x\to x_0$ 时函数极限的定义

> **定义 1.7**　设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个去心邻域内有定义,如果当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 无限趋近于一个常数 $A$,那么就说 $A$ 是当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作
>
> $$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的图象就是函数 $y=x+2\ (x\neq 2)$ 的图象,如图 1-6 所示,当 $x\to 2$ 时 $f(x)$ 有极限,且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

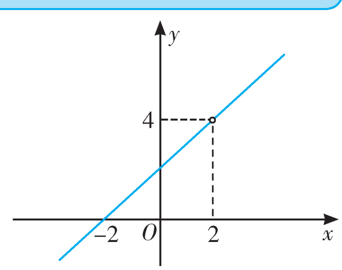


图 1-6

由常值函数 $y=C$ 和函数 $y=x$ 的图象易知:

$$\lim_{x\to x_0}C=C\ (C\text{ 为常数}),\quad \lim_{x\to x_0}x=x_0.$$

当函数 $y=f(x)$ 是基本初等函数时,若 $x_0$ 是 $f(x)$ 定义区间内部的点(端点除外),则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

即极限值等于函数值.例如,$\lim\limits_{x\to 2}x^3=2^3=8$,$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

(2)左极限和右极限.当 $x$ 仅从 $x_0$ 的左侧,即小于 $x_0$ 的一侧趋近于 $x_0$ 时,记作 $x\to x_0^-$;当

$x$ 仅从 $x_0$ 的右侧,即大于 $x_0$ 的一侧趋近于 $x_0$ 时,记作 $x\to x_0^+$.

**定义 1.8**　设函数 $y=f(x)$,如果当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$无限趋近于一个常数 $A$,那么就说 $A$ 是当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\text{或}f(x_0^-)=A;$$

如果当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$无限趋近于一个常数 $A$,那么就说 $A$ 是当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时函数 $f(x)$ 的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,\text{或}f(x_0^+)=A.$$

由定义 1.7 和定义 1.8 可以看出:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 的充要条件是}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

**例 3**　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2-1, & 0\leqslant x<1,\\ 1-x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 考察极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在.

**解**　作出函数 $y=f(x)$ 的图象,如图 1-7 所示.

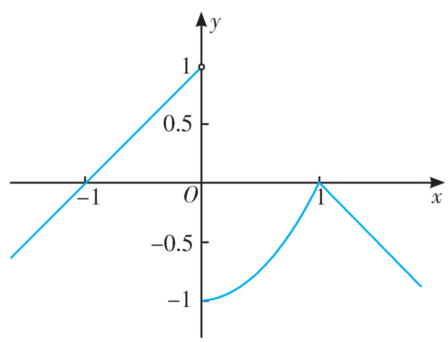


图 1-7

(1)考察极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

在 $x=0$ 左侧附近,$f(x)=x+1$,所以

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1;$$

在 $x=0$ 右侧附近,$f(x)=x^2-1$,所以

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1.$$

左、右极限存在但不相等,由极限存在的充要条件可知:$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

(2)考察极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

在 $x=1$ 左侧附近,$f(x)=x^2-1$,所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$;

在 $x=1$ 右侧附近,$f(x)=1-x$,所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)=0$.

左、右极限存在且相等,由极限存在的充要条件可知:$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

无穷小与无穷大

### 1.2.3　无穷小量与无穷大量

1.无穷小量

如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限为零,那么就说当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 是无穷小量,简称无穷小.

例如:因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,所以 $x\to 0$ 时,$\sin x$ 是无穷小;

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$,所以 $x\to 1$ 时,$\ln x$ 是无穷小;

因为 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$,所以 $x\to +\infty$ 时,$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 是无穷小;

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,所以 $x\to\infty$ 时,$\frac{1}{x}$是无穷小.

无穷小量具有以下性质:

(1)有限个无穷小量的代数和仍然是无穷小量;

(2)有限个无穷小量的乘积仍然是无穷小量;

(3)无穷小量与有界函数的乘积仍然是无穷小量.

例如,计算$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$.因为 $\sin x$ 是有界函数,$\frac{1}{x}$是 $x\to\infty$ 时的无穷小,则$\frac{1}{x}\sin x$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$.

2.无穷大量

当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,如果 $f(x)$ 的绝对值无限地增大,那么称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量,简称无穷大,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty);$$

如果 $f(x)$ 取正值且无限增大,则称 $f(x)$ 是正无穷大,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\ (\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty);$$

如果 $f(x)$ 取负值而绝对值无限增大,则称 $f(x)$ 是负无穷大,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty\ (\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty).$$

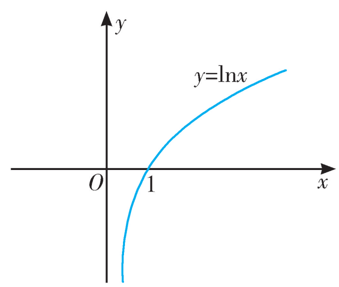


图 1-8

例如,$y=\frac{1}{x}$是 $x\to0$ 时的无穷大.如图 1-3 所示,可记作$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$;$y=\ln x$ 当 $x\to0^+$时是负无穷大,当 $x\to+\infty$ 时是正无穷大(如图 1-8 所示),可分别记作$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

很明显,无穷大与无穷小之间具有以下关系:

无穷大的倒数是无穷小,无穷小(不为零)的倒数是无穷大.

例如,$x\to0$ 时,$x$ 是无穷小,而$\frac{1}{x}$是无穷大.

**小贴士**

若当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 是无穷大,这时 $f(x)$ 是没有极限的,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$)仅仅是用来表示函数变化趋势的记号而已,并不表明极限存在.

3.垂直渐近线

从图 1-8 上看,$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$,意味着当 $x$ 从 0 的右侧无限趋近于 0 时,曲线 $y=\ln x$ 向下无限延伸,并无限接近直线 $x=0$,直线 $x=0$ 叫作曲线 $y=\ln x$ 的垂直渐近线.

**定义 1.9**　设函数 $y=f(x)$，$a$ 为定值，如果

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty\ (-\infty)\text{或}\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty\ (-\infty),$$

那么称直线 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

例如，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$，所以 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\tan x$ 的一条垂直渐近线；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条垂直渐近线.

## 知识应用

**案例**　从悬停在地震灾区上空 50 m 高处的直升机上丢下一包救灾物品，忽略空气阻力，记开始下落的时刻为 $t=0$.求在下落的第 3 秒末这一时刻物品的速度.

**解**　由于物体做自由落体运动，根据公式 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$（$g$ 为重力加速度），在时间段 $[3,t]$（$t>3$，当然也可以取 $[t,3]$，$t<3$）内物品下落的距离为

$$\Delta s=s(t)-s(3)=\frac{1}{2}g(t^2-9),$$

则在时间段 $[3,t]$ 内物品的平均速度为 $\bar{v}(t)=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{1}{2}g\cdot\dfrac{t^2-9}{t-3}$.

虽然物品下落速度随时间而改变，但时间间隔越短，速度的改变就越小，因此，在很小的时间区间 $[3,t]$ 上，下落可近似看成是匀速的.因此可以用 $\bar{v}(t)$ 来近似代替第 3 秒末这一时刻的速度.当 $\Delta t\to 0$，即 $t\to 3$ 时，$\bar{v}(t)$ 就无限接近第 3 秒末时刻的速度，所以，物品下落第 3 秒末这一时刻的速度就是

$$\lim_{t\to 3}\bar{v}(t)=\lim_{t\to 3}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{2}g\cdot\frac{t^2-9}{t-3}=3g(\text{m/s}),$$

即是这一时刻的瞬时速度.

## 能力训练1.2

1. 设函数 $y=f(x)$，$a$ 为定值，下列说法是否正确？

(1) 如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 有定义，那么 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在.

(2) 如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 无定义，那么 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在.

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

(4) 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=2$，那么 $f(a)=2$.

(5) 如果 $f(a)=2$，那么 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=2$.

(6) 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=2$，那么 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=2$.

(7) 如果 $f(a)=2$，那么 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ 是不可能的.

(8) 如果 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=3$，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=2.5$，那么 $f(a)=3$ 或者 $f(a)=2.5$.

2.设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ x^2-1, & 0\leqslant x<2,\\ 3, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 作出它的图象,并考察下列极限是否存在,若存在写出其极限值:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty}f(x)$.

3.设函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $g(x)=|x|$,考察 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

4.考察下列极限是否存在,若存在写出其极限值:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$;　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)$;　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{4^n}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

5.下列各函数在 $x$ 怎样变化时 $f(x)$ 为无穷小? $x$ 怎样变化时 $f(x)$ 为无穷大?

(1) $f(x)=2x-3$;　(2) $f(x)=\lg x$;　(3) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$;

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$;　(5) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$;　(6) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

## 1.3 极限的运算和两个重要极限

### 引　例

**【连续复利计算】** 银行按规定在一定时间结息一次,结息后即将利息并入本金,也就是将前一期的本金与利息的和作为后一期的本金来计算利息,逐期滚动计算,俗称"利滚利",这种计算方法叫复利.

某人把一笔钱 $A_0$ 存入银行,假设年利率为 $r$,分别按以下几种计息方式计算本利和.

(1)若每年结息一次,则一年后的本利和为

$$A_1=A_0+r\cdot A_0=A_0(1+r);$$

两年后的本利和为

$$A_2=A_1+r\cdot A_1=A_1(1+r)=A_0(1+r)^2;$$

依次计算 $n$ 年后的本利和为

$$A_n=A_0(1+r)^n.$$

这是一年计息 1 期,$n$ 年后的本利和 $A_n$ 的复利公式.

(2)若每半年结息一次,相当于一年结算两次利息,每次以 $\dfrac{r}{2}$ 为利率来计算,则一年后的本利和为

$$A_1=A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^2;$$

$n$ 年后的本利和为

$$A_n=A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}.$$

这是一年计息 2 期，$n$ 年后的本利和 $A_n$ 的复利公式.

(3)若每月结息一次，相当于一年结算 12 次利息，每次以$\frac{r}{12}$为利率来计算，则一年后的本利和为

$$A_1=A_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12};$$

$n$ 年后的本利和为

$$A_n=A_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}.$$

这是一年计息 12 期，$n$ 年后的本利和 $A_n$ 的复利公式.

(4)若一年均匀分 $m$ 期计息，年利率仍为 $r$，则每期以$\frac{r}{m}$为利率来计算，于是一年后的本利和为

$$A_1=A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m};$$

$n$ 年后的本利和为

$$A_n=A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}.$$

这是一年计息 $m$ 期，$n$ 年后的本利和 $A_n$ 的复利公式.

数列$\left\{A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}\right\}$是一个递增数列，因此，结算的次数越多，利息也越多，如果让计息间隔无限缩短，即 $m\to\infty$（这意味着每一时刻都在结算并支付利息，这种计息方式称为连续复利），则 $n$ 年后本金与利息总和为

$$A=\lim_{m\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}.$$

这个极限值该怎样计算呢？利用极限的定义只能计算一些简单函数的极限，而实际问题中的函数却要复杂很多.本节将介绍计算极限的常用方法，并使用这些方法去求解较复杂函数的极限.

### 1.3.1　极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则下列运算法则成立：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=kA$（其中 $k$ 是常数）；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq0)$.

上面的法则对 $x\to\infty$ 的情形和数列极限都成立.其中法则(1)和(2)可以推广到有限个函数的情形.

**例 1** 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^3-5x+2}{3x^2+x}$.

**解** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^3-5x+2}{3x^2+x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(4x^3-5x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(3x^2+x)}=\dfrac{4\lim\limits_{x\to1}x^3-5\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}2}{3\lim\limits_{x\to1}x^2+\lim\limits_{x\to1}x}=\dfrac{1}{4}$.

一般地,如果 $f(x)$ 是初等函数,$a$ 是其定义区间内的一个值,则有

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

例如,求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x}{x^2-2x+3}$. 因为 $x=2$ 时分母不等于零,是定义域内的一个值,所以 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x}{x^2-2x+3}=\dfrac{2\times2^2-3\times2}{2^2-2\times2+3}=\dfrac{2}{3}$.

**例 2** 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$.

**解法一** 当 $x\to2$ 时,分子与分母极限都是0,不能用运算法则(4).$x\to2$ 的意义是 $x$ 无限趋近于2,但 $x\neq2$,因此 $x-2\neq0$,所以可以约去公因式 $x-2$ 后再考察,即

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+3}=\frac{2+1}{2+3}=\frac{3}{5}.$$

**解法二** 用 Matlab 数学软件来解

输入:

```
>>syms x
>>limit((x^2-x-2)/(x^2+x-6),x,2)
ans=
3/5
```

**例 3** 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}\ (a>0)$.

**解** 当 $x\to0$ 时,分子、分母都趋向于0,不能用极限运算法则,故先变形再考察.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

对于上面例2和例3都是两个无穷小之比,这种类型的极限称为“$\dfrac{0}{0}$”型的未定式,通常要找出使分子、分母都趋向于0的因式,通过分解因式或分式有理化等方法约去这个因式,再求极限.

**例 4** 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+1}{x^2-9}$.

**解** 当 $x\to3$ 时,分母极限是0,所以不能用法则(4),但分子极限不是0 ,故可以先考虑倒数的极限.因为

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2+1}=\frac{0}{10}=0,$$

所以,根据无穷小与无穷大的关系得$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+1}{x^2-9}=\infty$.

**例 5**　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{5x^2-x+2}$.

**解法一**　当 $x\to\infty$ 时,分子、分母都是无穷大,不能用法则(4).先将分子、分母同除以 $x^2$ 后,再用法则,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{5x^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{5-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{2+0-0}{5-0+0}=\frac{2}{5}.$$

**解法二**　用 Matlab 数学软件来解

输入:

```
>>syms x
>>limit((2*x^2+3*x-1)/(5*x^2-x+2),x,inf)
ans=
2/5
```

在上面例 5 中,当 $x\to\infty$ 时,分子、分母都是无穷大量,两个无穷大量之比叫作“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式,对于此类极限一般用分子、分母同时除以 $x^n$($n$ 为分子、分母的最高次数)来处理.对于$x\to\infty$ 时有理分式函数的“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式,容易得出下面的结果:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},m=n,\\0,\ m>n,\\\infty\ ,m<n,\end{cases}$$

其中 $m,n$ 都是正整数,且 $a_0\neq0,b_0\neq0$.

同样对于数列,“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式极限也可以用此方法.

**例 6**　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n}{7n^3+5n-3}$.

**解**　先将分子、分母同除以 $n^3$ 后再用法则,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{7n^3+5n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}{7+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}=\frac{0+0}{7+0-0}=0.$$

### 1.3.2　两个重要极限

首先介绍一个判定极限存在的法则.

两边夹法则　如果在 $x_0$ 的某邻域内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,那

么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

对于 $x\to\infty$ 的情形和数列极限也有相应的两边夹法则.

1.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$(重要极限 1)

第一个重要极限

如图 1-9 所示,在单位圆中取$\angle AOB=x$(弧度),$0<x<\dfrac{\pi}{2}$,$AC$ 为圆的切线.比较$\triangle OAB$、扇形 $OAB$、$\triangle OAC$ 的面积,得

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

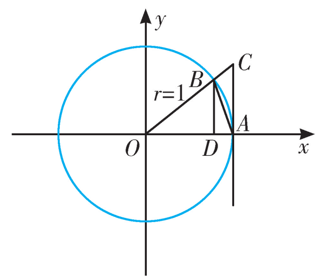



图 1-9

整理,得

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$,$\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$,所以,根据两边夹法则,得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

当 $x<0$ 时,令 $t=-x$,则当 $x\to 0^-$ 时,$t\to 0^+$,所以

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1.$$

综上可知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 成立.

**例 7** 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

**解** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}\overset{令\,5x=u}{=\!=\!=\!=}\dfrac{5}{3}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=\dfrac{5}{3}\cdot 1=\dfrac{5}{3}$.

在例 7 中使用了换元法,换元的步骤有时可以省略,如下面的例子.

**例 8** 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

**解法一** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\times 1^2=\dfrac{1}{2}$.

**解法二** 用 Matlab 数学软件来解

输入:

```
>>syms x
>>limit((1-cos(x))/x^2,x,0)
ans=
1/2
```

例 9 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

**解法一** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}=\dfrac{3}{2}$.

**解法二** 用 Matlab 数学软件来解

输入：

```
>>syms x
>>limit(sin(3*x)/sin(2*x),x,0)
ans=
3/2
```

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$（重要极限 2）

第二个重要极限

这里的 e 就是作为自然对数底的无理数，小数点后取五位时，$\mathrm{e}\approx2.718\ 28$. e 和圆周率 $\pi$ 都是科学技术中十分有用的常数，具有特殊地位.

令 $\dfrac{1}{x}=t$ 换元，即可得到重要极限 2 的另一形式：

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

对于数列也有这一结果，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}.$$

**例 10**　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

**解法一**　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\mathrm{e}^{3}$.

**解法二**　用 Matlab 数学软件来解

输入：

```
>>syms x
>>limit((1+3/x)^x,x,inf)
ans=
exp(3)
```

**例 11**　求 $\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$.

**解法一**　$\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\{[(1+(-5x)]^{-\frac{1}{5x}}\}^{-5}=\mathrm{e}^{-5}$.

**解法二**　用 Matlab 数学软件来解

输入：

```
>>syms x
>>limit((1-5*x)^(1/x),x,0)
ans=
exp(-5)
```

**知识应用**

**案例 1**　某人把 100 万元存入银行，年利率为 5%，按连续复利计算，那么 3 年后的本利和是多少？

**解**　由本节引例知，$n$ 年后本金与利息总和为

$A=\lim\limits_{m\to\infty}A_0\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{n\cdot m}=A_0\lim\limits_{m\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{nr}=A_0\mathrm{e}^{nr}$,这就是连续复利公式.

把 $A_0=100,n=3,r=5\%$,代入连续复利公式,则 3 年后的本利和为

$A=A_0\mathrm{e}^{nr}=100\mathrm{e}^{0.05\times3}\approx100\times1.161\ 8=116.18$(万元).

**案例 2** 人类要发射卫星需要使用运载火箭,求火箭脱离地球引力所需要的最小速度.

**解** 设火箭所要达到的最大高度为 $h$,那么发射火箭所需要的初速度为

$$v=f(h)=\sqrt{\frac{2gRh}{h+R}}=\sqrt{\frac{2gR}{1+\dfrac{R}{h}}},h\in(0,+\infty),$$

其中 $g$ 是重力加速度,$R$ 是地球半径.

求火箭脱离地球引力所需要的最小速度就是要求当 $h\to+\infty$ 时,函数 $v=f(h)$ 的极限值,即

$$\lim_{h\to+\infty}f(h)=\lim_{h\to+\infty}\sqrt{\frac{2gRh}{h+r}}=\sqrt{2gR}=11\ 200(\mathrm{m/s}),$$

其中 $g$ 取 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$,$R$ 取 $6.4\times10^6$ m.这个极限值就是第二宇宙速度.

## 能力训练1.3

1.求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+x+5}{3x^4+x^2-2}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x^2+4x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x+4}{x^2-1}$; (4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x}{(x-3)^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$; (6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{4x^2+5x-2}$; (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x+5}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n-1}{n^3+2}$; (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^2}{3n^2+2}$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6n^3}$; (12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+5^{n+1}}{4^n+5^n}$;

(13) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; (14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x-2}$.

2.求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin3x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin5x}$; (3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan2x}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$; (5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$; (6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

3.求下列极限;

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$; (3) $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{x}+2}$;

(4) $\lim\limits_{x \to 0}(1+\sin x)^{2\csc x}$；　(5) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$；　(6) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}$.

4. 设圆的半径为 $r$，试利用极限思想证明圆的周长为 $C=2\pi r$.

5. 求曲线的水平渐近线或垂直渐近线：

(1) $y=\dfrac{1-2x^2}{x^2-4}$；　　(2) $y=\dfrac{x^2-3}{x^3-27}$.

## 1.4　函数的连续性

### 引　例

**【身高增长】** 人的身高 $h$ 是时间 $t$ 的函数 $h(t)$，而且 $h$ 随着 $t$ 连续变化.事实上，当时间 $t$ 的变化很微小时，人的高度 $h$ 的变化也是很微小的.即当 $\Delta t \to 0$ 时，$\Delta h \to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\Delta h=0$.这就是“连续”的特征.

自然界中许多量的变化都是“连续”的，如气温的变化、植物的生长、物体的运动、放射性物质质量的衰减等，这些现象反映在数学上就是函数的连续性.它是与函数极限密切相关的一个数学基本概念.

### 1.4.1　函数的连续性

1. 函数的增量

设函数 $y=f(x)$，当 $x$ 从 $x_1$ 变到 $x_2$ 时，终值 $x_2$ 与初值 $x_1$ 的差 $x_2-x_1$ 叫作自变量 $x$ 的增量（也称改变量），记作 $\Delta x$，即 $\Delta x=x_2-x_1$，函数值的差 $f(x_2)-f(x_1)$ 叫作函数的增量（改变量），记作 $\Delta y$，即

$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+\Delta x)-f(x_1).$$

例如，设 $f(x)=2x^2-1$，则

当 $x$ 从 1 变到 1.2 时，$\Delta x=1.2-1=0.2$，

$$\Delta y=f(1.2)-f(1)=(2\times1.2^2-1)-(2\times1^2-1)=0.88;$$

当 $x$ 从 0 变到 $-0.1$ 时，$\Delta x=-0.1-0=-0.1$，

$$\Delta y=f(-0.1)-f(0)=[2\times(-0.1)^2-1]-(-1)=0.02.$$

2. 函数在一点连续的概念

设函数 $y=f(x)$，$x_0$ 是其定义域内一点，当自变量从 $x_0$ 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.如图 1-10 所示，函数 $y$ 随着自变量 $x$ 的改变而改变，它是“连续”不断的，显然有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta y=0$，即

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

令 $x=x_0+\Delta x$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，$x \to x_0$，因而上式等价于

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

即
$$\lim_{x \to x_0}f(x)=f(x_0).$$

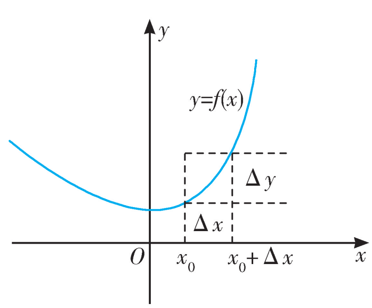



图 1-10

**定义 1.10**　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内有定义,如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续,称 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个连续点.

定义 1.10 对函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续要求同时满足三个条件:

(1) $f(x)$ 在 $x_0$ 有定义,即函数值 $f(x_0)$ 存在;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

函数的连续性

这三个条件中任何一条不满足,就说 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续,这时称点 $x_0$ 是 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

如图 1-11 所示,函数 $f(x)$ 的图象在点 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 是不连续的,它们不满足上述函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续要求的三个条件.其中 $x_2$ 不满足条件(1),$x_1,x_3$ 不满足条件(2),$x_4$ 不满足条件(3).除了这四个点以外的其他点处(包括 $x_5$),函数的图象都是连续的.

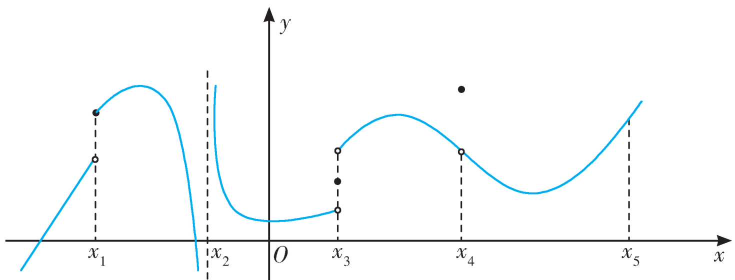



图 1-11

**例 1**　说明函数在指定点处是否连续:

(1) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},x=1$;　　(2) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}\quad x=1$;

(3) $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant -1,\\ x-1, & x>-1,\end{cases}\quad x=-1$;　　(4) $f(x)=|x|,x=0$.

**解**　(1) 因为 $h(x)$ 在 $x=1$ 无定义,所以 $h(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续(如图 1-12(1) 所示).

(2) $g(x)$ 在 $x=1$ 有定义,$g(1)=1$,但

$$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\neq g(1).$$

所以 $g(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续(如图 1-12(2) 所示).

(3) $\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 有定义,$\varphi(-1)=-(-1)=1$,但

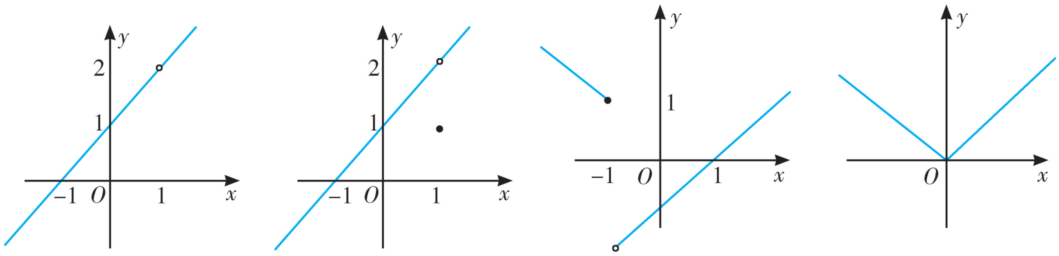
$$\lim_{x\to -1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to -1^-}(-x)=1,\ \lim_{x\to -1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to -1^+}(x-1)=-2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)$ 不存在.因此 $\varphi(x)$ 在点 $x=-1$ 处不连续(如图 1-12(3) 所示).

(4) $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义,$f(0)=0$,且

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续(如图 1-12(4)所示).



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 1-12

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左连续;

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处右连续.

如图 1-11 所示,函数在点 $x_1$ 处右连续;如图 1-12(3)所示,函数在 $x=-1$ 处左连续.

容易知道:函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在 $x_0$ 处既左连续又右连续.

下面给出函数在区间上连续的定义.

> **定义 1.11**　若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内任意一点都连续,则称 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内连续.若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

在某个区间上连续的函数,如果区间是半开区间或闭区间,在有定义的端点处函数连续,是指左连续或右连续.如果函数 $f(x)$ 在某个区间上连续,则称 $f(x)$ 是该区间上的连续函数,这个区间称为连续区间.

在某个区间上连续的函数,在该区间上,函数的图象是一条连续无间断的曲线.

3.初等函数的连续性

我们不加证明地给出如下重要结论:基本初等函数在其定义域内都是连续的;初等函数在其定义区间内都是连续的.因此,求初等函数的连续区间就是求其定义区间.计算初等函数在其定义区间内某一点的极限值,只要计算该函数在这一点的函数值即可.即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

由于 $f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$,所以上式可以改写为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x),$$

即对连续函数,其极限运算与函数运算顺序可以交换.这个特性在求某些复合函数极限时会给我们带来很大的便利.

> **定理 1.1**　设函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$,$f(u)$ 在 $u=b$ 处连续,那么
> $$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(b).$$

**例 2**　设函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}-1}$,讨论 $f(x)$ 的连续性,并求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

**解** $f(x)$是初等函数,它的定义域是$(-1,1)\cup(1,+\infty)$,所以$f(x)$分别在区间$(-1,1)$和$(1,+\infty)$内连续,在$x=1$处间断.又$0\in(-1,1)$,所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{\ln(0+1)}{\sqrt[3]{0-1}}=0.$$

**例 3** 求$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

**解** $y=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$可以看成是由$y=\ln u$,$u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$复合而成的,且$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,$y=\ln u$在$u=\mathrm{e}$处连续,所以

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\mathrm{e}=1.$$

### 1.4.2 闭区间上连续函数的性质

1.最大值、最小值性质

设函数$f(x)$在$D$上有定义,$a\in D$,对任意的$x\in D$:如果$f(a)\geqslant f(x)$,则称$f(a)$是$f(x)$在$D$上的最大值;如果$f(a)\leqslant f(x)$,则称$f(a)$是$f(x)$在$D$上的最小值.

**定理 1.2** 闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$一定有最大值和最小值.

如图 1-13 所示,$f(x)$在$[a,b]$上连续,在$x=b$处有最小值$f(b)$,在$x=c_2$处有最大值$f(c_2)$.

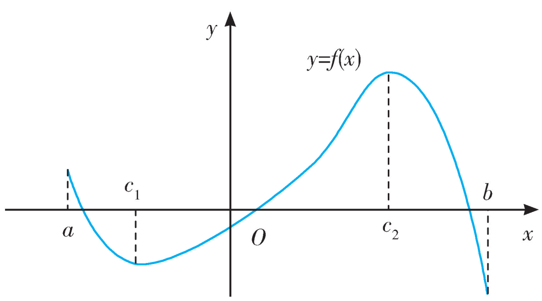



图 1-13

2.介值性质

**定理 1.3**(介值定理) 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,$f(a)\neq f(b)$,$\mu$是介于$f(a)$与$f(b)$之间的任一数,那么在$(a,b)$内至少有一点$c$,使得$f(c)=\mu$.

特别地,如果$f(a)$与$f(b)$符号相反,那么在$(a,b)$内至少有一点$c$,使得$f(c)=0$.

介值定理的意义:如果水平直线$y=\mu$介于两条平行线$y=f(a)$和$y=f(b)$之间,那么连续曲线$y=f(x)$与直线$y=\mu$至少相交一次.如图 1-14(1)所示.

在$f(a)$与$f(b)$符号相反的情形下,则曲线$y=f(x)$与直线$y=0$(即$x$轴)至少有一个交点$(c,0)$,如图 1-14(2)所示.由$f(c)=0$可知,$x=c$是方程$f(x)=0$的一个实数根.

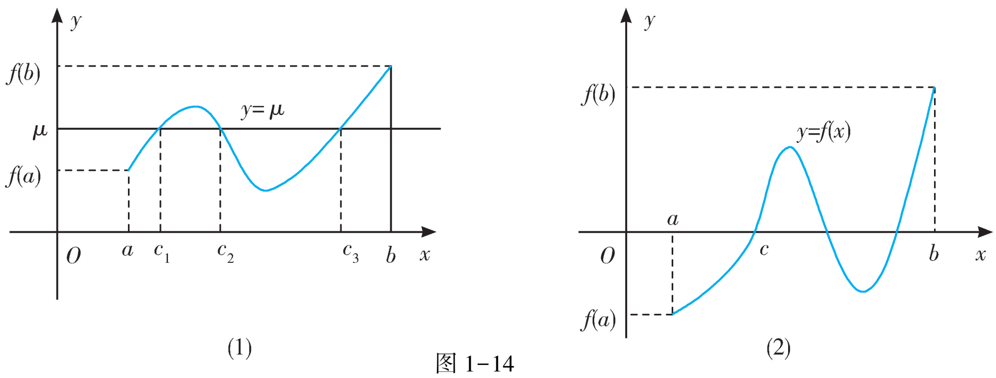



图 1-14

## 知识应用

**案例**　证明方程 $2x^3+x-7=0$ 在 $(1,2)$ 内有实数根.

**证明**　设 $f(x)=2x^3+x-7$，$f(x)$ 是初等函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，又 $f(1)=-4<0$，$f(2)=11>0$，由介值定理，在 $(1,2)$ 内至少有一个实数 $c$，使得 $f(c)=0$，即

$$2c^3+c-7=0.$$

所以方程 $2x^3+x-7=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个实数根 $x=c$.

## 能力训练1.4

1.判断下列函数在指定点处是否连续：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$，$x=0$，$x=2$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$，$x=3$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & x\leqslant -1,\\ 2x+1, & x>-1,\end{cases}$ $x=-1$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $x=0$.

2.下列函数是否有间断点？若有，求出来.

(1) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^2+3x+2}$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2+1, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1;\end{cases}$　　(6) $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ e, & x=0.\end{cases}$

3.求下列函数的连续区间：

(1) $f(x)=x^3-2x+5$；　　(2) $f(x)=\ln(x-1)$；

(3) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$；

(5) $f(x)=\ln\dfrac{x-3}{x+3}$；　　(6) $f(x)=\arctan\sqrt{x+2}$.

4.求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x^2+\cos x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-3}{x^2+x-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\dfrac{x-1}{x^2-x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\dfrac{4x^2-5x}{x^2+3x+7}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}$.

5.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+3, x\leqslant 0,\\ 2a-x, x>0,\end{cases}$ 当 $a$ 为何值时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

## 任务解决

**任务一 【哪一家公司费用较便宜】** (见任务提出)

**解** (1)甲公司出租一天汽车的费用(元)与行程(千米)之间的函数为

$$f_1(x)=320+1.2x;$$

乙公司出租一天汽车的费用(元)与行程(千米)之间的函数为

$$f_2(x)=480+0.8x;$$

(2)当 $f_1(x)=f_2(x)$ 时，$x=200$，即当行程为 200 千米时，两家公司的费用一样多；而当 $x<200$ 时，$f_1(x)<f_2(x)$，甲公司的费用较便宜；当 $x>200$ 时，$f_1(x)>f_2(x)$，乙公司的费用较便宜.

**任务二 【贷款的还款总额】** (见任务提出)

**解** 由题意知，$A_0=80$ 万元，$r=8\%$，$n=10$，代入连续复利公式，可得 2029 年 2 月 15 日到期一次还本付息的还款总额为

$$A=A_0e^{nr}=80e^{0.08\times 10}\approx 80\times 2.225\ 5=178.043\ 3(\text{万元}).$$

由于计算比较繁杂，用 Matlab 数学软件求解：

输入：

```
>>80 * exp(0.08 * 10)
ans =
178.0433
```

**任务三 【圆的面积】** (见任务提出)

**证明**：作圆内接正 $n$ 边形，连接圆心与圆内接正 $n$ 边形的各顶点，把圆内接正 $n$ 边形分成了 $n$ 个相等的三角形，每个三角的面积为 $S_\triangle=\dfrac{1}{2}r^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$，则圆内接正 $n$ 边形的面积 $A_n=n\cdot S_\triangle=\dfrac{n}{2}r^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

当圆内接正 $n$ 边形的边数 $n$ 无限增大时，圆内接正 $n$ 边形的面积无限接近圆的面积. 因此，应用第一个重要极限，可得圆的面积为

$$S_{圆}=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\pi r^2\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\pi r^2.$$

## 建模案例

# 椅子能在不平的地面上放稳吗?

### 一、问题的提出

把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳,然而只要稍挪动几次,就可以四脚着地,放稳了,用数学语言加以证明.

### 二、模型的假设

1.椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触可视为一个点,四脚的连线呈正方形.

2.地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即地面可视为数学上的连续曲面.

3.对于椅脚的间距和椅脚的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.

### 三、模型的建立

中心问题是用数学语言表示四只脚同时着地的条件、结论.

首先用变量表示椅子的位置,由于椅脚的连线呈正方形,以正方形中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代表了椅子的位置的改变,于是可以用旋转角度 $\theta$ 这一变量来表示椅子的位置.

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来,如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离,当这个距离为 0 时,表示椅脚着地了.椅子要挪动位置说明这个距离是位置变量的函数.

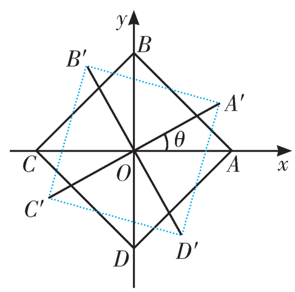



图 1-15　正方形椅脚

由于正方形的中心对称性,只要设两个距离函数就行了,记 $A,C$ 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$,$B,D$ 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$,显然 $f(\theta)\geqslant 0,g(\theta)\geqslant 0$,由假设 2 知 $f(\theta),g(\theta)$ 都是连续函数,再由假设 3 知 $f(\theta),g(\theta)$ 至少有一个为 0.当 $\theta=0$ 时,不妨设 $g(\theta)=0,f(\theta)>0$,这样改变椅子的位置使四只脚同时着地,就归结为如下命题:

**命题**　已知 $f(\theta),g(\theta)$ 是 $\theta$ 的连续函数,对任意 $\theta,f(\theta)*g(\theta)=0$,且 $g(0)=0,f(0)>0$,则存在 $\theta_0$,使 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$.

### 四、模型的求解

将椅子旋转 90°,对角线 $AC$ 和 $BD$ 互换,由 $g(0)=0,f(0)>0$ 可知 $g(\frac{\pi}{2})>0,f(\frac{\pi}{2})=0$.令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$,则 $h(0)>0,h(\frac{\pi}{2})<0$,由 $f(\theta),g(\theta)$ 的连续性知 $h(\theta)$ 也是连续函数,由零点定理,必存在 $\theta_0(0<\theta_0<\frac{\pi}{2})$ 使 $h(\theta_0)=0,g(\theta_0)=f(\theta_0)$,由 $g(\theta_0)*f(\theta_0)=0$,所以 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$.

### 五、模型的结果分析与推广

该模型讨论了椅子四脚连线为正方形的模型,并给出了椅子可以在不平的地面放稳的详细证明过程.该模型应用了连续函数的介值定理.事实上,椅子的形状有很多种,我们仅仅讨论了最特殊的一种,还有常见的椅子四条腿呈长方形的情形,这种情形又如何证明呢?请思考.

## 知识框架

- 函数、极限与连续
  - 函数的概念
    - 函数的定义
    - 分段函数
    - 基本初等函数
    - 复合函数
    - 初等函数
  - 极限的概念
    - 极限的定义
    - 无穷小与无穷大
    - 极限的四则运算法则
    - 极限的计算方法
    - 两个重要极限
  - 连续的概念
    - 函数的增量
    - 函数在一点连续
    - 函数的间断点
    - 连续区间
    - 初等函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质

## 单元拓展

### 知识阅读:哲学角度认识极限法

极限思想在现代数学乃至物理学等学科中有着广泛的应用,这是由它本身固有的思维功能所决定的.极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系,是唯物辩证法的对立统一规律在数学领域中的应用.借助极限思想,人们可以从有限认识无限,从“不变”认识“变”,从直线认识曲线,从量变认识质变,从近似认识精确.

“变”与“不变”反映了事物运动变化与相对静止两种不同状态,但它们在一定条件下又可相互转化,这种转化是“数学科学的有力杠杆之一”.例如,要求变速直线运动的瞬时速度,用初等方法是无法解决的,困难在于速度是变量.为此,人们先在小范围内用匀速代替变速,并求其平均速度,把瞬时速度定义为平均速度的极限,它就是借助极限的思想方法,从“不变”来认识“变”.

曲线与直线有着本质的差异,但在一定条件下也可以相互转化,正如恩格斯所说:“直线与曲线在微积分中终于等同起来了.”善于利用这种对立统一关系是处理数学问题的手段之一.直线围成的面积容易求得,曲线围成的面积的求解用初等的方法是不能解决的.刘徽用圆内接正多边形逼近圆,一般地,人们用小矩形的面积来逼近曲边梯形的面积,都是借助极限

的思想方法,从直线围成图形的面积来认识曲线围成图形的面积.

量变和质变既有区别又有联系,两者之间有着辩证的关系.量变能引起质变,质和量的互变规律是辩证法的基本规律之一,在数学研究工作中起着重要作用.对任何一个圆内接正多边形来说,当它的边数加倍后,得到的还是内接正多边形,是量变而不是质变;但是,不断地让边数加倍,经过无限过程之后,多边形就“变”成圆,多边形面积便转化为圆面积.这就是借助极限的思想方法,从量变来认识质变.

近似与精确是对立统一关系,两者在一定条件下也可相互转化,这种转化是数学应用于实际计算的重要诀窍.前面所讲到的“平均速度”“圆内接正多边形面积”,分别是相应的“瞬时速度”和“圆面积”的近似值,取极限后就可得到相应的精确值.这也是借助极限的思想方法,从近似来认识精确的.

## 单元1复习题

1.判断题:

(1)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2)如果$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$都存在,那么$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在.

(3)如果$f(x)$为初等函数,且在$(a,b)$内有定义,$c\in(a,b)$,那么$\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$.

(4)基本初等函数在其定义域内的每一点都连续.

(5)初等函数在它的定义区间内是连续的.

(6)$10^{100}$是无穷大量.

(7)函数$f(x)$当$x\to x_0$时是无穷小,则$\dfrac{1}{f(x)}$一定是无穷大.

(8)常数与无穷小的积仍是无穷小.

(9)对于单调增函数,随着自变量的增加,函数值的增量一定是正值.

(10)连续函数必有最大值和最小值.

2.选择题:

(1)如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=l$,那么(　　).

A.$f(x_0)=l$　　B.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$

C.$f(x)$在点$x_0$处连续　　D.以上三种说法都不对

(2)在$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}$,$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$,$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$和$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$中,极限值为1的有(　　).

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

(3)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$的结果为(　　).

A.0　　B.$\infty$　　C.$k(k\neq0)$　　D.无法确定

(4)当$x\to$(　　)时,$y=\dfrac{3x}{x^2-9}$为无穷大.

A.3　　B.0　　C.$\infty$　　D.$\pm3$

(5)当$x\to\infty$时,下列所给函数为无穷小量的是(　　).

A.$3x+2$　　B.$\sin x$　　C.$\arctan x$　　D.$\dfrac{x}{x^2-1}$

3.填空题：

(1)设$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$\varphi(x)=\sin x$,那么$f[\varphi(x)]=$________,$f[\varphi(\pi)]=$________.

(2)函数$y=e^{\sin x^2}$可以看成是由简单函数________,________和________复合而成的.

(3)函数$f(x)=\dfrac{x^2+5x}{x^2-4}$的定义域为________,连续区间为__________.

(4)函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{9-x^2}$在区间____________上连续.

(5)如果$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+1}\right)^{x+1}=e^2$,那么$a$的值是________.

4.求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+2}{2x^2+3}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to4}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$;　　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{3x^2+7}$;

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{x^4+3x^2}$;　　(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+3n}{n^2+2n-3}}$;　　(6)$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$;

(7)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$;　　(8)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{9x}$;　　(9)$\lim\limits_{x\to0}(1+6x)^{-\frac{1}{x}}$;

(10)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2-3n}$;　　(11)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin x^2$;　　(12)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\sin x^2$;

(13)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$;　　(14)$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}$;　　(15)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

5.设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{kx}=e^2$,求$k$的值.

6.设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2, x<0,\\ a-1, x=0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, x>0.\end{cases}$

(1)$a,b$为何值时,极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在?

(2)$a,b$为何值时,函数$f(x)$在$x=0$连续?

7.设$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=1$,求常数$a,b$的值.

8.一只圆球形气球,充气时其半径以2 cm/s的速度增加,试把气球的体积$V(\text{cm}^3)$表示成时间$t(\text{s})$的函数.

9.一支礼花炮燃放后从地面竖直冲上天空,在爆炸前的一段时间里,其高度$h$与时间$t$的关系为$h=50t-4.9t^2$,其中$t$的单位是s,$h$的单位是m,求$t=3$ s这一时刻礼花炮的速度.

# 单元 2　导数与微分

## 单元概要

导数、微分及其应用称为微分学，不定积分、定积分及其应用称为积分学. 一元函数的微分学与一元函数的积分学统称为一元函数的微积分学.

导数反映了函数相对于自变量的变化而变化的快慢程度，即函数的变化率. 在自然科学和工程技术的众多领域中有许多实际问题，例如：物体运动的瞬时速度、非恒定电流的电流强度、放射性物质的衰减速度等，所有这些在数量关系上都归结为函数的变化率，即导数. 而微分则刻画了当自变量有微小变化时，函数大约有多少变化. 本单元首先提出任务，之后将介绍导数的概念和基本运算，微分的概念和运算，并了解用数学软件 Matlab 求导数，然后利用这些知识解决本单元提出的任务.

## 单元目标

**知识目标**：理解导数与微分的概念；了解隐函数的求导方法；知道高阶导数的定义；会根据导数公式及法则计算初等函数的导数或微分；会求简单函数的二阶导数.

**能力目标**：能利用变化率解决简单的实际问题；能用 Matlab 数学软件求导数；能运用微分进行简单的近似计算.

**素质目标**：培养学生的数学思维、数学应用能力；培养学生的数学素养；培养学生的创新精神.

## 任务提出

**任务一　【人影移动的速率】**

某人高 1.8 m，在水平路面上以 1.6 m/s 的速率走向一街灯，若此街灯在路面上方 5 m，当此人与灯的水平距离为 4 m 时，人影端点移动的速率为多少？

**任务二　【电流强度】**

如果一电路中的电量 $Q(t)=t^3-t$. 求：(1) 在时刻 $t$ 的电流强度 $i(t)$；(2) $t=2$ 时的电流强度.

**任务三　【每月向银行多付多少元贷款】**

张先生最近考虑买一套商品房，需要向银行抵押贷款 120 000 元. 设贷款年利率为 $r$，每月等额还款，30 年内还清贷款，每月应还银行款额 $p(r)$ 为

$$p(r)=\frac{120\ 000\times\frac{r}{12}}{1-\left(1+\frac{r}{12}\right)^{-360}}(\text{元}).$$

如果银行的年利率由10%增加到10.2%,试估算张先生每月向银行多付多少元贷款?

**任务四 【绝对误差和相对误差】**

光纤是光导纤维的简称,它是一种新型的光波导,现在实用的光纤是一根比人的头发稍粗的玻璃丝,确保光纤光缆的质量至关重要.光纤基本参数的测试是对光纤光缆的质量保证.光纤的特征参数有几何特征参数和光学特征参数两种,其中几何特征参数包括光纤长度、纤芯直径、包层直径、纤芯不圆度、芯/包层同心度误差等.

设某厂生产的光纤直径平均值为 $D=20$ μm,绝对误差的平均值为 2 μm,试计算其截面积,并估计其绝对误差和相对误差.

## 单元知识

# 2.1 导数的概念

### 引 例

**引例 1** 平面曲线的切线斜率

已知平面曲线 $y=f(x)$ 过点 $P(x_0,f(x_0))$,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率.

**分析** 如图 2-1 所示,$P(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个定点,$M(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 是曲线上的动点,则割线 $PM$ 的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

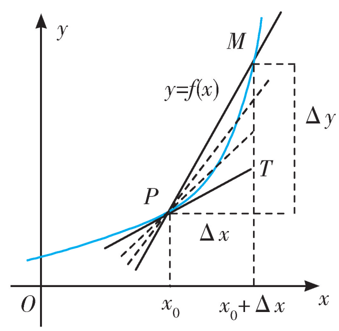


图 2-1

当 $\Delta x\to 0$ 时,点 $M$ 就沿着曲线趋向于点 $P$,如果割线 $PM$ 的斜率有极限,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=k, \tag{2.1}$$

那么就把过点 $P$ 以 $k$ 为斜率的直线 $PT$ 定义为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P$ 处的切线,即切线 $PT$ 就是割线 $PM$ 当 $M$ 沿曲线趋向于 $P$ 时的极限位置.

**引例 2** 变速直线运动的瞬时速度

设一物体作变速直线运动,以它的运动直线为数轴,则在物体运动的过程中,对于每一时刻 $t$,物体的相应位置可以用数轴上的一个坐标 $s$ 表示,即 $s$ 与 $t$ 之间存在函数关系:$s=s(t)$,这个函数习惯上叫作位置函数.现在我们来考察该物体在 $t_0$ 时刻的瞬时速度.

**分析** 设在 $t_0$ 时刻物体的位置为 $s(t_0)$.当自变量 $t$ 获得增量 $\Delta t$ 时,物体的位置函数 $s$ 相应地有增量(如图 2-2),此时有

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0).$$

于是比值

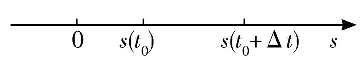


图 2-2

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

就是物体在 $t_0$ 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度,记作$\bar{v}$,即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

当$|\Delta t|$很小时，其平均速度就可以近似地看作 $t_0$ 时刻的瞬时速度.因此，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\bar{v}$的极限定义为物体在 $t_0$ 时刻的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

这就是说，物体运动的瞬时速度是当时间增量趋向于零时，位置函数的增量和时间的增量之比的极限.

上述两例的实际意义完全不同，但从抽象的数量关系来看，它们的实质是一样的.可以看出，式(2.1)与式(2.2)是同一种形式的极限，即当自变量增量趋向于零时，函数增量与自变量增量之比的极限.我们把这种特定的极限叫作导数.

导数的定义

### 2.1.1　导数的定义

1.函数在点 $x_0$ 处的导数

**定义 2.1**　设函数 $y=f(x)$在点 $x_0$ 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数$f(x)$在点 $x_0$ 处可导，这个极限值叫作$f(x)$在点 $x_0$ 处的导数，记作$f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.3}$$

如果式(2.3)的极限不存在，则称函数$f(x)$在点 $x_0$ 处不可导.

**小贴士**

导数$f'(x_0)$也叫作函数$f(x)$在点 $x_0$ 处相对于自变量 $x$ 的变化率，即因变量在 $x_0$ 处的瞬时变化率.

函数 $y=f(x)$在点 $x_0$ 处的导数记号还常用 $y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$ 等表示.

记 $x=x_0+\Delta x$，式(2.3)就成为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{2.4}$$

2.函数的导数

如果函数 $f(x)$在区间$(a,b)$内的每一点都可导，就说 $f(x)$在$(a,b)$内可导.这时，对$(a,b)$内的每一个 $x$ 值，都有唯一确定的导数值$f'(x)$和它对应，从而在$(a,b)$内确定了一个函数，称为函数$f(x)$的导函数，简称为导数，记作$f'(x)$，$y'$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$等.

在式(2.3)中把 $x_0$ 换成 $x$，即得导数的定义：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{2.5}$$

**思考题**：$f'(x_0)$与$f'(x)$的关系是什么？

小贴士

导数的概念是隐去几何和物理的实际背景,而抽象地定义为函数因变量与自变量的增量比值的极限.数学的抽象性使我们能够在生活中抓住事物的共性和本质.

由以上讨论可知,沿直线运动物体的位置函数 $s(t)$ 关于时间 $t$ 的导数 $s'(t)$ 就是速度函数 $v(t)$,即 $v(t)=s'(t)$.

### 2.1.2 用定义计算导数

根据导数定义求导数,可按以下三步进行:

(1)计算函数的增量:$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

(2)计算两个增量的比值:$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

(3)求极限:$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

**例 1** 求常值函数 $y=f(x)=C$($C$ 为常数)的导数.

**解** $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$,于是 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$,即

$$(C)'=0(C\text{ 为常数}).$$

**例 2** 求函数 $y=x^n(x\in\mathbf{N}^*)$的导数.

**解** $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\mathrm{C}_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\mathrm{C}_n^2x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+\mathrm{C}_n^2x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}]=nx^{n-1}.$$

即
$$(x^n)'=nx^{n-1},n\in\mathbf{N}^*.$$

事实上,当 $n$ 是任意的实常数时,上式都成立,即幂函数的求导公式为

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\alpha\text{ 为实常数}.$$

例如,按此公式得 $(x)'=1$,$(x^2)'=2x$,$(x^3)'=3x^2$,….

又如,$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}\text{等}.$$

### 2.1.3 导数的几何意义

根据引例 1 可知导数的几何意义.

**导数的几何意义** 设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处可导,则 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率,即 $k=f'(x_0)$.

于是,由直线的点斜式方程,曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0);$$

法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad(f'(x_0)\neq 0).$$

**小贴士**

若 $f'(x_0)=0$,则切线方程为 $y=f(x_0)$,法线方程为 $x=x_0$;若 $f'(x_0)=\infty$,则切线方程为 $x=x_0$,法线方程为 $y=f(x_0)$.

**例 3** 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 处的切线方程和法线方程.

**解** 由导数的几何意义可知,曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 处切线的斜率为

$$k=y'|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=-4,$$

可得,切线方程为

$$y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right),\text{即 } 4x+y-4=0.$$

法线方程为

$$y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right),\text{即 } 2x-8y+15=0.$$

### 2.1.4 函数的可导性与连续性的关系

**定理 2.1** 如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导,那么 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续.

但是这个定理的逆命题不成立.即函数在某点连续,但在该点不一定可导.

**例 4** 讨论函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 处连续但不可导.

**解** 根据初等函数的连续性,函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 处连续(如图 2-3 所示).

因为 $y'=(\sqrt[3]{x})'=(x^{\frac{1}{3}})'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

所以当 $x=0$ 时,$y'$不存在.

即函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 处不可导.

函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续但不可导.

**思考题**:可导、连续、有极限之间有何关系? 试举例说明.

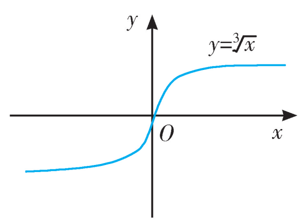


图 2-3

**知识应用**

前面我们从实际问题中抽象了导数的概念,现在把抽象的概念运用到实践中去,在科学技术中常把导数称为变化率.

对于函数 $y=f(x)$ 来说,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 表示 $y$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率;$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 称为函数 $y$ 在 $x_0$ 处的变化率.当函数有不同实际含义时,变化率的含义也不同.

**案例 1** **【非恒定电流的电流强度】**在导线中有一强度变化不定的电流通过,设在 $t$ 时刻通过某一固定截面的电量为 $Q(t)$,求在 $t_0$ 时刻的电流强度 $i(t_0)$.

**解** 以 $\Delta Q$ 表示电流通过导线的时间从 $t_0$ 到 $t_0+\Delta t$ 的电量,则在时间间隔为 $\Delta t$ 内的平均电流强度为 $\bar{i}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}$,则 $t_0$ 时刻的电流强度为

$$i(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=Q'(t_0).$$

**案例 2** 【**冷却速度**】当物体的温度高于周围介质的温度时,物体就不断冷却,若物体的温度 $T$ 与时间 $t$ 的函数关系为 $T=T(t)$,应怎样确定该物体在时刻 $t_0$ 的冷却速度?

**解** 时间从 $t_0$ 到 $t_0+\Delta t$,温度的改变量为 $\Delta T=T(t_0+\Delta t)-T(t_0)$,此时,平均冷却速度为 $\bar{v}=\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$,则 $t_0$ 时刻冷却速度为

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=T'(t_0).$$

**案例 3** 【**PN 节模型**】具有 PN 节的半导体元件,其电流微变和引起这个变化的电压微变之比称为低频跨导.现有一种 PN 节的半导体元件,其转移特性曲线方程为 $I=5U^2$,求电压 $U=2$ V 时的低频跨导.

**解** 由题意知,低频跨导是电压变化引起电流变化的平均变化率,因此在 $U=2$ V 时的低频跨导为 $U=2$ V 时电流的变化率,就是电流对电压的导数,即

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U}\right|_{u=2}=\lim_{\Delta U\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta U}=\lim_{\Delta U\to 0}\frac{5(2+\Delta U)^2-5\times 2^2}{\Delta U}=20.$$

**小贴士**

导数 $y'=f'(x)$ 的单位就是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的单位,利用这一点,有助于理解具体问题中导数的实际意义.例如,对于直线运动中的位移 $s=s(t)$,若位移 $s$ 和时间 $t$ 的单位分别为 m 和 s,则 $s'(t)$ 的单位就是 m/s,这正是速度的单位.

## 能力训练2.1

1.一物体铅直上抛,经过时间 $t$(单位:s)后,物体上升高度为 $s=10t-\frac{1}{2}gt^2$(单位:m).求:

(1)物体在 $t$ s 到 $(t+\Delta t)$ s 这段时间内的平均速度;

(2)物体在 $t$ s 末这一时刻的速度;

(3)物体在 1 s 末这一时刻的速度和高度.

2.设函数 $f(x)=\sqrt{4-x}$.(1)按导数定义求 $f'(x)$;(2)计算 $f'(3)$.

3.运用幂函数的求导公式求下列函数的导数:

(1)$y=x^3$; (2)$y=\frac{1}{x^2}$; (3)$y=\sqrt[4]{x^3}$;

(4)$y=x^2\cdot\sqrt[5]{x}$; (5)$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; (6)$y=\frac{x^2}{x\sqrt{x}}$.

4.求曲线在指定点处的切线方程：

(1)$y=\sqrt{x}$,$x=4$ 的点；　　　(2)$y=\cos x$,点$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

5.已知一质点沿 $s$ 轴运动,运动方程为 $s=t^3$(单位:m),求该质点在 $t=3$(单位:s)时的速度.

6.$m_0$ g 的碳-14,$t$ 年后的剩余量为 $Q(t)=m_0\mathrm{e}^{-1.21\times10^{-4}t}$ g.试说出 $Q'(t)$ 的单位,以及 $Q'(1\ 000)$的具体意义.

7.设$f'(a)$存在,求下列极限：

(1)$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(a-\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$;　　　(2)$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$.

## 2.2　导数的运算

### 引　例

**引例 1**　本单元第一节案例 1 中,如果电量函数 $Q(t)=t^3-t$,求在 $t_0$ 时刻导线中的电流强度$i(t_0)$.

**分析**　电流强度 $i(t_0)$就是电量函数在 $t_0$ 处的导数,即 $i(t_0)=Q'(t_0)$,需先求解 $i(t)=Q'(t)=(t^3-t)'$.但是,根据导函数的定义进行求解就显得比较复杂了.如果$(t^3-t)'$的求解能用公式进行,将大大降低了难度.本节将介绍一些基本的求导公式和求导法则,利用这些知识可以方便地求出一些复杂函数的导数.

**引例 2**　气球充气时,半径 $r$ 以 1 cm/s 的速度增大.假设在充气过程中气球保持球形,求当半径 $r=10$ cm 时,气球体积 $V$ 的变化率.

**分析**　气球体积与半径的函数关系为 $V=f(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$,则体积对半径的变化率为 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=4\pi r^2$.假设半径与时间有函数关系 $r=g(t)$,由题意知,半径对时间的变化率为$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=1$ cm/s.那么体积对时间的变化率$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$即是求复合函数 $V=f(g(t))$的导数,应如何求解呢?

**引例 3**　将物体以与水平方向成夹角 $\theta$ 的初速度 $v_0$ 斜向上抛出,物体的运动轨迹可用参数方程表示为

$$\begin{cases}x=v_0t\cos\theta,\\ y=v_0t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}(t\text{ 为物体运动的时间}).$$

求 $y'_x$.

**分析**　由题意知,因变量 $t$ 与自变量 $x$ 的函数关系是用参数方程形式表达的,此时应该怎样求 $y'_x$呢? 假如能把参数 $t$ 通过代入法消元,把函数关系表示为 $y=f(x)$的形式,即可求出 $y'_x$.本题将 $t=\dfrac{x}{v_0\cos\theta}$代入 $y=v_0t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2$,得到

$$y=v_0\cdot\frac{x}{v_0\cos\theta}\sin\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2,$$

由上式即可求出 $y'_x$.但有的参数方程通过代入法消元有可能过程很复杂,或者根本无法消元.

因此,本节课将介绍参数方程的一般求导方法.

**引例 4**　一物体挂在竖直弹簧的下端,在时刻 $t$ 的位置为 $s(t)=5\sin\dfrac{t}{3}$.求时刻 $t$ 的速度 $v(t)$ 和加速度 $a(t)$.

**分析**　由导数的物理意义,我们知道物体在时刻 $t$ 的速度 $v(t)$ 是位移关于时间 $t$ 的导数,即 $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{5}{3}\cos\dfrac{t}{3}$,显然速度 $v(t)$ 仍然为时间 $t$ 的函数,它关于时间 $t$ 的导数便是物体的加速度,即 $a(t)=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.于是加速度 $a(t)$ 是位移 $s(t)$ 关于时间 $t$ 导数的导数,称为位移 $s(t)$ 关于时间 $t$ 的二阶导数.如果对二阶导数再求导,是不是三阶导数呢?可以不可以再继续求导?

求函数的变化率就是导数,它是理论研究和实践应用中经常遇到的一个普通的问题.但根据定义求导往往比较繁难,有时甚至是不可行的.为了简化求导运算,下面介绍函数的求导公式、求导法则以及求导方法.

### 2.2.1　导数公式及四则运算的求导法则

1.基本初等函数的导数公式

表 2.1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $(C)'=0$($C$ 为常数) | 2 | $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ |
| 3 | $(a^x)'=a^x\ln a$ | 4 | $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$ |
| 5 | $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ | 6 | $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ |
| 7 | $(\sin x)'=\cos x$ | 8 | $(\cos x)'=-\sin x$ |
| 9 | $(\tan x)'=\sec^2 x$ | 10 | $(\cot x)'=-\csc^2 x$ |
| 11 | $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$ | 12 | $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$ |
| 13 | $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 14 | $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 15 | $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ | 16 | $(\mathrm{arccot}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ |

2.函数四则运算的求导法则

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在点 $x$ 处可导,则由它们的和、差、积、商构成的函数也在点 $x$ 处可导,且有

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

(2) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, 特别地,$(C\cdot u)'=Cu'$($C$ 为常数);

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$,特别地,$\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-\dfrac{Cv'}{v^2}$($C$ 为常数).

**例 1**　求下列函数的导数:

(1) $y=\sqrt{x}+2\cos x-\sin\pi$;　　(2) $y=x^2\ln x$;　　(3) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

**解**　(1) $y'=(\sqrt{x})'+(2\cos x)'-(\sin\pi)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2\sin x$.

(2) $y'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$.

(3) $y'=\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)'=\dfrac{(x^2)'(1+x^2)-x^2(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$

$=\dfrac{2x(1+x^2)-x^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

复合函数的求导法则

### 2.2.2　复合函数的求导法则

**复合函数的求导法则**　如果 $u=\varphi(x)$ 在点 $x$ 处可导, $y=f(u)$ 在对应点 $u$ 处可导,那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x$ 处可导,且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\text{也常写成 } y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

即 $y$ 对 $x$ 的导数等于 $y$ 对中间变量 $u$ 的导数再乘以中间变量 $u$ 对 $x$ 的导数.这一法则也称为**链式法则**.

**例 2**　求下列函数的导数.

(1) $y=\ln\cos x$;　　(2) $y=(x^2+1)^{50}$.

**解**　(1) $y=\ln\cos x$ 可以看成由 $y=\ln u$ 和 $u=\cos x$ 复合而成,所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot(-\sin x)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x.$$

(2) $y=(x^2+1)^{50}$ 可以看成由 $y=u^{50}$ 和 $u=x^2+1$ 复合而成,所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=50u^{49}\cdot 2x=100x(x^2+1)^{49}.$$

推广:当复合函数由两个以上函数复合而成时,例如,由 $y=f(u)$, $u=g(v)$, $v=\varphi(x)$ 复合而成 $y=f\{g[\varphi(x)]\}$,运用两次链式法则就得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\left(\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\right)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

**例 3**　求函数 $y=\sqrt{\sin x^2}$ 的导数.

**解**　$y=\sqrt{\sin x^2}$ 可以看成由 $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$ 和 $v=x^2$ 复合而成,因为

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}},\quad \frac{du}{dv}=\cos v,\quad \frac{dv}{dx}=2x,$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\cos v\cdot 2x=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

由以上几例可以看出,运用链式法则求复合函数的导数的关键是能够正确地将复合函数分解成若干个简单函数.

在对复合函数分解熟练的基础上,求导时中间变量可以不写出来,只需按照复合层次,由外向内,逐层求导即可.在求导过程中,始终要明确所求的导数是哪个函数对哪个变量的导数.

例如,例 2、例 3 的运算过程可以写成:

$$(\ln\cos x)'=\frac{1}{\cos x}(\cos x)'=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x;$$

$$[(x^2+1)^{50}]'=50(x^2+1)^{49}\cdot(x^2+1)'=50(x^2+1)^{49}\cdot 2x=100x(x^2+1)^{49};$$

$$(\sqrt{\sin x^2})'=\frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}}(\sin x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}}\cdot\cos x^2\cdot(x^2)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}}\cdot\cos x^2\cdot 2x=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

**例 4** 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{\frac{1}{x}}$; (2) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$.

**解** (1) $y'=(e^{\frac{1}{x}})'=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

(2) $$y'=\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\cot\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'$$

$$=\cot\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}=\csc x.$$

有时计算函数的导数需要同时运用函数四则运算的求导法则和复合函数的求导法则,有时还需要先把函数化简为易于求导的形式,然后再进行求导.

**例 5** 求下列函数的导数:

(1) $y=(x-1)\sqrt{x^2-1}$; (2) $y=\ln\sqrt{x^2+1}$; (3) $y=\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

**解** (1) $$y'=(x-1)'\sqrt{x^2-1}+(x-1)(\sqrt{x^2-1})'$$

$$=\sqrt{x^2-1}+(x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(x^2-1)'$$

$$=\sqrt{x^2-1}+(x-1)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(2) 因为 $y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$,

所以 $$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+1}.$$

(3) 因为 $$y=\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=1+\cos x,$$

所以 $$y'=(1+\cos x)'=-\sin x.$$

**例 6**　已知函数 $y=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cos 4x}{e^x}$，求 $y'$，$y'|_{x=2}$.（用 Matlab 数学软件完成）

**解**　输入：

```
>>syms x
>>dydx=diff(sqrt(x^2+1)-(x*cos(4*x)/exp(x)))          %求函数的导数
>>a=subs(dydx,x,2)                                       %求 x=2 导数值
>>vpa(a,5)                          %显示导数的实数值且取 5 位有效数字
```

输出：dydx=x/(x^2+1)^(1/2)-cos(4*x)*exp(-x)+x*cos(4*x)*exp(-x)+4*x*sin(4*x)*exp(-x)

a=cos(8)*exp(-2)+8*exp(-2)*sin(8)+(2*5^(1/2))/5

ans=1.9459

### 2.2.3　隐函数与参数式函数的导数

隐函数的求导

1.隐函数的导数

在此前求导中的函数，因变量 $y$ 都是用关于自变量 $x$ 的表达式来表示的，如 $y=\ln\cos x$，$y=\sqrt{\sin x^2}$ 等，这样的函数称为显函数.在实际中，还常会遇到由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数，这样的函数称为隐函数，如方程 $x^2+y^2=4$ 和 $xy-\cos y=0$.

有些隐函数可以化为显函数.例如，从方程 $x^2+y^2=4$ 容易解出 $y$，得到两个单值显函数

$$y=\sqrt{4-x^2} \text{ 和 } y=-\sqrt{4-x^2}.$$

而许多方程是很难或根本不能够把因变量解出来的，例如，方程 $xy-\cos y=0$，就不能解出 $y$，因此需要讨论怎样直接由方程 $F(x,y)=0$ 来求导数.

**隐函数的求导方法**　在方程 $F(x,y)=0$ 的两边同时对 $x$ 求导，把 $y$ 看作 $x$ 的函数；当遇到 $y$ 的函数 $\varphi(y)$ 时，则看成是以 $x$ 为自变量、$y$ 为中间变量的复合函数，运用链式法则去求 $\varphi(y)$ 对 $x$ 的导数，即

$$\frac{d}{dx}\varphi(y)=\frac{d}{dy}\varphi(y)\cdot\frac{dy}{dx}=\varphi'(y)\cdot y'_x.$$

**例 7**　设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy-\cos y=0$ 所确定的隐函数，求 $y'_x$.

**解法一**　在方程 $xy-\cos y=0$ 中把 $y$ 看作 $x$ 的函数，方程两边对 $x$ 求导，得

$$y+xy'_x+\sin y\cdot y'_x=0,$$

解出 $y'_x$，得
$$y'_x=-\frac{y}{x+\sin y}.$$

**解法二**　输入：

```
>>syms x y                        %定义符号变量
>>f=x*y-cos(y);                   %方程的左边赋给变量
>>dydx=-diff(f,x)/diff(f,y)       %求隐函数导数
```

输出：dydx =-y/(x + sin(y))　　　　%即 $y'_x=-\dfrac{y}{x+\sin y}$

**小贴士**

由于隐函数常常解不出 $y=y(x)$ 的显函数形式，因此在导数 $y'_x$ 的表达式中往往含有自变量 $x$ 和因变量 $y$.

形如 $y=u(x)^{v(x)}$ 的函数通常称为**幂指函数**，这种函数的求导，可以如下进行，即首先在等式两边取自然对数，化为隐函数形式

$$\ln y=v(x)\ln u(x),$$

然后按照隐函数的求导法求出 $y'$，这种方法称为对数求导法. 对数求导法适用于求幂指函数的导数，也适用于由乘、除、乘方、开方运算所构成的较复杂的函数求导.

**例 8** 求函数 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数.

**解** 等式两边取自然对数，得 $\ln y=\sin x\cdot\ln x$,

两边对 $x$ 求导，得 $$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x},$$

所以 $$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

**例 9** 求曲线 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(3x-1)}{(5x+3)(2-x)}}\left(\dfrac{1}{3}<x<2\right)$ 的导数.

**解** 等式两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{3}[\ln x+\ln(3x-1)-\ln(5x+3)-\ln(2-x)],$$

两边对 $x$ 求导，得 $$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{3x-1}-\frac{5}{5x+3}+\frac{1}{2-x}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{3}y\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{3x-1}-\frac{5}{5x+3}+\frac{1}{2-x}\right)\\&=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(3x-1)}{(5x+3)(2-x)}}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{3x-1}-\frac{5}{5x+3}+\frac{1}{2-x}\right).\end{aligned}$$

参数式函数的导数

2. 参数式函数的导数

设参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$ 可确定 $y$ 与 $x$ 之间的一个函数关系 $y=f(x)$，$x$ 为自变量，$y$ 为因变量，$t$ 为参数，则称此函数关系所表示的函数为由参数方程所确定的函数.

**参数式函数的求导法则** 设由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(t\in(\alpha,\beta))$ 确定的函数为 $y=f(x)$，其中函数 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都在 $t$ 处可导，且 $\varphi'(t)\neq0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $x$ 处可导且有如下公式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{2.6}$$

公式(2.6)证明略.

**例 10**　求参数方程$\begin{cases}x=1+\sin t,\\ y=t\cos t\end{cases}$表示的函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**解法一**　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(t\cos t)'}{(1+\sin t)'}=\dfrac{\cos t-t\sin t}{\cos t}=1-t\tan t.$

**解法二**　用 Matlab 数学软件来解

输入:

```
>>syms t
>>dydx=diff(t*cos(t))/diff(1+sin(t))
```

输出:

dydx=(cos(t)-t*sin(t))/cos(t)　　　　%即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cos t-t\sin t}{\cos t}$

**例 11**　求曲线$\begin{cases}x=\cos\theta+\sin2\theta,\\ y=\sin\theta+\cos2\theta\end{cases}$在 $\theta=0$ 对应点处的切线方程.

**解**　$\theta=0$ 时,$x=1,y=1$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\sin\theta+\cos2\theta)'}{(\cos\theta+\sin2\theta)'}=\frac{\cos\theta-2\sin2\theta}{2\cos2\theta-\sin\theta}.$$

$\theta=0$ 对应点处的切线斜率为

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{\cos\theta-2\sin2\theta}{2\cos2\theta-\sin\theta}\right|_{\theta=0}=\frac{1}{2}.$$

所以切线方程为

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1),\text{即 } x-2y+1=0.$$

高阶导数

### 2.2.4　高阶导数

1.高阶导数的定义及求法

如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是可导函数,则把 $y'$ 的导数叫作 $y=f(x)$ 的二阶导数,记作

$$y'',f''(x),\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\text{或}\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

同理,$y=f(x)$ 的二阶导数的导数叫作 $y=f(x)$ 的三阶导数,$y=f(x)$ 的三阶导数的导数叫作 $y=f(x)$ 的四阶导数,…,$y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数叫作 $y=f(x)$ 的 $n$ 阶导数.$y=f(x)$ 的三阶导数,四阶导数,…,$n$ 阶导数分别记作

$$y''',f'''(x),\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\text{或}\frac{\mathrm{d}^3f(x)}{\mathrm{d}x^3};$$

$$y^{(4)},f^{(4)}(x),\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}\text{或}\frac{\mathrm{d}^4f(x)}{\mathrm{d}x^4};$$

……

$$y^{(n)},f^{(n)}(x),\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\text{或}\frac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

二阶及二阶以上的导数称为高阶导数,需要时,也称 $y'=f'(x)$ 为 $y=f(x)$ 的一阶导数.

**例 12** 设 $y=\cos^2 x$,求 $y''$,$y''(0)$.

**解** 因为 $y=\cos^2 x$,

所以

$$y'=2\cos x(\cos x)'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x,$$

$$y''=(y')'=(-\sin 2x)'=-\cos 2x\cdot(2x)'=-2\cos 2x,$$

$$y''(0)=-2\cos 2x\big|_{x=0}=-2.$$

**例 13** 设 $n$ 次多项式 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(n\in\mathbf{N}^*)$,求 $P_n^{(n)}(x)$.

**解**

$$P'_n(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1,$$

$$P''_n(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+3\cdot 2a_3x+2a_2,$$

……

$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_n=n!\ a_n.$$

**例 14** 求 $y=xe^x$ 的 $n$ 阶导数.

**解** 因为

$$y=xe^x,$$

所以

$$y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x,$$

$$y''=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x,$$

$$y'''=e^x+(2+x)e^x=(3+x)e^x,$$

……

归纳可得

$$y^{(n)}=(n+x)e^x.$$

2.二阶导数的物理意义

在前面的讨论中已经知道,物体作变速直线运动时,若其路程函数为 $s(t)$,则物体在某一时刻的速度 $v(t)$ 是路程对时间 $t$ 的一阶导数,即 $v(t)=s'(t)=\dfrac{ds}{dt}$.

因速度 $v(t)$ 仍是时间 $t$ 的函数,所以可以得出运动物体的加速度

$$a(t)=v'(t)=[s'(t)]'=s''(t)=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

它是路程 $s(t)$ 对时间 $t$ 的二阶导数,通常把它看作二阶导数的物理意义.

**例 15** 已知 $y=x^2\cos x+\ln 3x$.求 $y^{(10)}$,$y^{(10)}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.(用 Matlab 数学软件完成)

**解** 输入:

```
>>syms x y
>>y=x^2*cos(x)+log(3*x);
>>d10y=diff(y,x,10)            %求函数的 10 阶导数
>>a=subs(d10y,x,0.5)           %求当 x=1/2 时 10 阶导数值
>>vpa(a,5)                     %将导数值显示为实数,有效位为 5 位
```

输出:

```
d10y=90*cos(x)-x^2*cos(x)-20*x*sin(x)-362880/x^10
a=(359*cos(1/2))/4-10*sin(1/2)-371589120
ans=-3.7159e8                  %科学记数法表示为-3.7159×10^8
```

## 知识应用

**案例1**　某电器厂在对冰箱制冷后断电测试其制冷效果，$t$ h 后冰箱的温度为 $T=\frac{2t}{0.05t+1}-20$（单位：℃）．问冰箱温度 $T$ 关于时间 $t$ 的变化率是多少？

**解**　冰箱温度 $T$ 关于时间 $t$ 的变化率为

$$T'=\left(\frac{2t}{0.05t+1}-20\right)'=\left(\frac{2t}{0.05t+1}\right)'-(20)'$$
$$=\frac{(2t)'(0.05t+1)-(2t)(0.05t+1)'}{(0.05t+1)^2}-0=\frac{2}{(0.05t+1)^2}.$$

**案例2**　求当半径 $r=10$ cm 时，气球体积 $V$ 的变化率．（见本节引例2）

**解**　因为气球体积与半径的函数关系为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，而半径 $r$ 又随时间 $t$ 的变化而变化，所以 $V$ 是 $t$ 的复合函数．根据题意可知 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=1$，$r=10$，由复合函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$

将 $r=10$，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=1$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=4\pi\cdot10^2\cdot1=400\pi.$$

即当半径 $r=10$ cm 时，气球体积 $V$ 的变化率为 $400\pi$．

**案例3**　一物体挂在竖直弹簧的下端，在时刻 $t$ 的位置为 $s(t)=5\sin\frac{t}{3}$，求时刻 $t$ 的速度 $v(t)$ 和加速度 $a(t)$．

**解**　$v(t)=s'(t)=\left(5\sin\frac{t}{3}\right)'=\frac{5}{3}\cos\frac{t}{3}$；

$a(t)=s''(t)=\left(\frac{5}{3}\cos\frac{t}{3}\right)'=-\frac{5}{9}\sin\frac{t}{3}$.

## 能力训练2.2

1.求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{x}+\pi^2$；　(2) $y=4x^3-\frac{2}{x^2}+5$；　(3) $y=(2x-1)^2$；

(4) $y=\frac{x^2-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$；　(5) $y=\frac{1+\ln x}{x}$；　(6) $y=\cot x\sec x$；

(7) $y=(1-x^2)\tan x$；　(8) $y=\frac{x}{1+x^2}$；　(9) $y=3^x-2e^x+\arcsin x$.

2.求下列复合函数的导数：

(1) $y=\sin x^2$；　(2) $y=\cot 2x$；　(3) $y=\ln\sin x$；

(4) $y=(2+5x)^4$；　(5) $y=\frac{1}{1+2x}$；　(6) $y=\sqrt{2x+1}$；

(7) $y=\sqrt{4-3x^2}$;　(8) $y=\cos^3 x$;　(9) $y=\tan^2 x$;

(10) $y=\ln\sin 2x$;　(11) $y=\sin^2(2-3x)$;　(12) $y=\sqrt{\sec x}$.

(13) $y=\mathrm{e}^{-x}-\arccos(1-x)$;　(14) $y=3^{\sec x}$;　(15) $y=\mathrm{e}^{2x}\arctan x$;

(16) $y=\ln(\arcsin\sqrt{x})$;　(17) $y=\sin^2(\mathrm{e}^x)$;　(18) $y=2^{\sin x}+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

3.一球形气球的半径 $r$(单位:cm)随时间 $t$(单位:s)而变,如果 $r=3+2t$,试求气球体积相对于时间 $t$ 的变化率.

4.点 $M$ 是弹簧上一定点,弹簧振动时,点 $M$ 的运动方程为 $s(t)=3\mathrm{e}^{-1.2t}\sin 2\pi t$,其中时间 $t$ 的单位是 s,位移 $s$ 的单位是 cm.求在时刻 $t$ 点 $M$ 的速度.

5.在一个 $R-C$ 电路中,电量 $Q(t)=10(1-\mathrm{e}^{-6t})$,求在时刻 $t$ 的电流强度 $i(t)$.

6.求由下列方程确定的隐函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $y^2=x^3$;　(2) $x^2+y^2-3xy=0$;　(3) $\cos y=\sqrt{x}$;

(4) $x^3-y^3=\sin xy$;　(5) $y=x-\arctan y$;　(6) $y=\ln(x+y)$;

(7) $\mathrm{e}^y-xy=0$;　(8) $x-\sqrt{y}=1$;　(9) $x^2y^2=1$.

7.用对数求导法求导数:

(1) $y=x^x(x>0)$;　(2) $y=x^{\ln x}$;　(3) $y=(\sin x)^x$;

(4) $y=(\cos x)^{\sin x}$;　(5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^5(x-3)}{1+x^2}}$;　(6) $y=\dfrac{(x+2)^3}{\sqrt[5]{x-2}}$.

8.求参数式函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $\begin{cases}x=5\cos\theta,\\y=3\sin\theta;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=t^2-1,\\y=3-2t;\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t-t,\\y=8\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}.\end{cases}$

9.求函数在指定点处的二阶导数:

(1) $y=(1+x)^3,x=0$;　(2) $y=\sin x,x=\dfrac{\pi}{2}$.

10.求下列函数的 $n$ 阶导数:

(1) $y=a^x(a>0,a\neq 1)$;　(2) $y=x\mathrm{e}^x$.

11.质点沿 $x$ 轴运动,位置函数为 $x=\sqrt{1+2t}$,$t$ 的单位是 s,$x$ 的单位是 m.求质点在 $t=4$ s 时的速度和加速度.

12.验证函数 $y=-\dfrac{2}{5}\cos x-\dfrac{4}{5}\sin x$ 满足等式 $y''+2y'-3y=4\sin x$.

# 2.3　函数的微分

## 引　例

一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 $x_0$ 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片的面积改变了多少？

**分析**　如图 2-4 所示，设此薄片的面积 $A=x^2$. 受到温度变化的影响后，面积由 $x_0^2$ 变为 $(x_0+\Delta x)^2$，故面积的改变量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

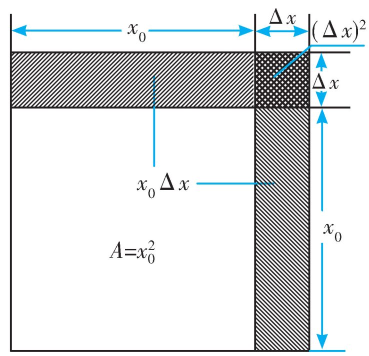



图 2-4

上式包含两部分，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 $\Delta x$ 的线性函数，即图 2-4 中带有斜线的两个矩形面积之和；第二部分 $(\Delta x)^2$ 是图中带有交叉斜线的小正方形的面积. 当边长有微小改变（即 $|\Delta x|$ 很小）时，第二部分 $(\Delta x)^2$ 要比第一部分 $2x_0\Delta x$ 小得多，可以忽略第二部分. 因此，当 $|\Delta x|$ 很小时，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是主要的，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是次要的，故可得 $\Delta A$ 的近似值

$$\Delta A\approx 2x_0\Delta x=A'|_{x=x_0}\cdot\Delta x,$$

$2x_0\Delta x$（或 $A'|_{x=x_0}\cdot\Delta x$）称为 $A=x^2$ 在点 $x_0$ 处的微分.

对于一般函数，是否也有类似情形呢？

微分的概念

### 2.3.1　微分的定义

> **定义 2.2**　设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，$\Delta x$ 是 $x$ 的任一增量，则 $f'(x_0)\Delta x$ 叫作函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即
>
> $$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x. \tag{2.7}$$

**例 1**　求函数 $y=x^2$ 在 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时的改变量及微分.

**解**　$\Delta y=(2.01)^2-2^2=0.0401$；

$\mathrm{d}y=(x^2)'\Delta x|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=2x\Delta x|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=2\times2\times0.01=0.04.$

规定自变量 $x$ 的增量 $\Delta x$ 为自变量 $x$ 的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 因此，式(2.7)又可写成

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

函数 $y=f(x)$ 在任意点 $x$ 处的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$，有

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

上式两边同除以 $\mathrm{d}x$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

由此可知，此前 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 仅是导数的一种记号，现在有了新的含义——微分之商，即函数导数等于函数的微分与自变量的微分的商，因此导数也称为微商. 有时利用微分求导数比较方便.

**例 2** 设曲线方程为 $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\sin 2t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**解** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}(\sin 2t)}{\mathrm{d}(\cos 2t)}=\dfrac{2\cos 2t\mathrm{d}t}{-2\sin 2t\mathrm{d}t}=-\cot 2t.$

### 2.3.2 微分的几何意义

设函数 $y=f(x)$,在 $x$ 轴上取点 $x_0$ 与 $x_0+\Delta x$,在曲线上有相应的点 $P(x_0,f(x_0))$ 和 $M(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$,过点 $P$ 作曲线的切线 $PT$,它的倾斜角为 $\alpha$,如图 2-5 所示.

$$PQ=\Delta x, QM=\Delta y.$$

根据微分定义有

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\cdot\Delta x=\tan\alpha\cdot\Delta x=QT.$$

由此可知,微分的几何意义:当 $\Delta y$ 是曲线 $y=f(x)$ 上点的纵坐标的改变量时,$\mathrm{d}y$ 就是曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的纵坐标的改变量.当 $|\Delta x|$ 很小时,$\Delta y\approx\mathrm{d}y$,切线段 $PT$ 可近似代替曲线段 $\overset{\frown}{PM}$.

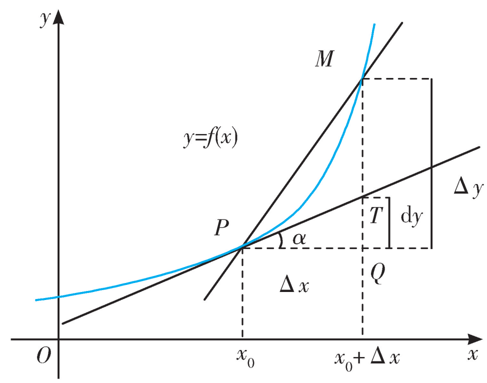



图 2-5

### 2.3.3 微分的运算

1.函数微分的计算

**例 3** 设函数 $y=x^2-3\cos x$,求 $\mathrm{d}y$.

**解** 因为 $y'=(x^2-3\cos x)'=2x+3\sin x$,

所以
$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(2x+3\sin x)\mathrm{d}x.$$

**小贴士**

根据函数微分的公式 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 可知,计算函数的微分,首先求出函数的导数,然后乘以自变量的微分即可.也就是说,微分的运算可以转化为导数的运算进行.

2.微分形式不变性

下面来讨论复合函数的微分.

如果 $y=f(u)$ 可导,$u$ 是自变量,根据微分定义,

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

如果 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 均可导,那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=\{f[\varphi(x)]\}'\mathrm{d}x=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x=f'[\varphi(x)]\cdot\mathrm{d}\varphi(x)=f'(u)\mathrm{d}u.$$

由此可见,无论 $u$ 是自变量还是复合函数的中间变量,其微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 不变,这一性质称为微分形式的不变性.

**小贴士**

复合函数的微分可以直接按定义计算,也可以利用微分形式的不变性计算.

**例 4** 设函数 $y=\sqrt{\arctan e^x}$,求 $\mathrm{d}y$.

**解** 利用微分形式的不变性,得

$$dy=d(\sqrt{\arctan e^x})=\frac{1}{2\sqrt{\arctan e^x}}d(\arctan e^x)$$

$$=\frac{1}{2(1+e^{2x})\sqrt{\arctan e^x}}d(e^x)=\frac{e^x}{2(1+e^{2x})\sqrt{\arctan e^x}}dx.$$

**例 5**　在括号内填入适当的函数，使下列等式成立：

(1) $d(\quad)=xdx$;　　(2) $d(\quad)=\sin 4t dt$.

**解**　(1) 因为 $d(x^2)=2xdx$，所以

$$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=d\left(\frac{1}{2}x^2\right),$$

因此，对任意常数 $C$，都有 $d\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)=xdx$.

(2) 因为 $d(-\cos 4t)=\sin 4t d(4t)=4\sin 4t dt$，所以

$$\sin 4t dt=\frac{1}{4}d(-\cos 4t)=d\left(-\frac{1}{4}\cos 4t\right),$$

因此，对任意常数 $C$，都有 $d\left(-\frac{1}{4}\cos 4t+C\right)=\sin 4t dt$.

### 2.3.4　利用微分进行近似计算

如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，函数的微分可作为函数改变量的近似值，即

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x. \tag{2.9}$$

称式(2.9)为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的改变量的近似值.

用 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 代入式(2.9)，可得

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{2.10}$$

**知识应用**

**案例 1**　某建筑工地建造一个高为 1.5 m 的圆柱形混凝土水池，设计内半径为 10 m，壁厚为 0.30 m. 建造后实测内半径仍为 10 m，但壁厚为 0.32 m. 问实际施工所用的混凝土量比设计所需的混凝土量多用了大约多少立方米？

**解**　设水池体积为 $V$，外半径为 $R$，按圆柱体体积公式有

$$V=1.5\pi R^2.$$

当外半径 $R$ 从 $(10+0.3)$ m 变到 $(10+0.32)$ m 时，体积 $V$ 的改变量约为

$$\Delta V=1.5\pi(10+0.32)^2-1.5\pi(10+0.30)^2=0.6186\pi(\mathrm{m}^3),$$

$$\Delta V\approx dV=d(1.5\pi R^2)=3\pi R dR=0.618\pi(\mathrm{m}^3).$$

**案例 2**　如图 2-6 所示，设有一电阻负载 $R=32\ \Omega$，现负载功率 $P$ 从 200 W 变化到 201 W，求负载两端电压 $U$ 的改变量.

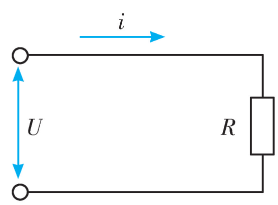


图 2-6

**解**　由电学知识可知，负载功率 $P=\frac{U^2}{R}$，因此得 $U=\sqrt{RP}$，故

$$dU=(\sqrt{RP})'dP=\sqrt{R}\cdot\frac{1}{2\sqrt{P}}dP=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{P}}dP.$$

由题意可知，$R=32$，$P=200$，$dP=1$，代入得

$$\Delta U \approx dU=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{200}}\times 1=0.2(\mathrm{V}).$$

## 能力训练2.3

1.按给定的 $\Delta x$,求函数在指定点处的微分:

(1) $y=x^3-4x+9, x=1, \Delta x=0.05$; (2) $y=\ln x, x=1, \Delta x=-0.01$.

2.求下列函数的微分:

(1) $y=2x^3-5x$; (2) $y=\mathrm{e}^{-\sin 2x}$; (3) $y=\ln x^2$;

(4) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; (5) $y=\mathrm{e}^x\sin x$; (6) $y=\arctan\sqrt{x}$.

3.利用微分求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $\begin{cases}x=t,\\ y=4\sqrt{t};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$

4.在括号内填入适当的函数,使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad)=2\mathrm{d}x$; (2) $\mathrm{d}(\quad)=3x\mathrm{d}x$;

(3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos t\mathrm{d}t$; (4) $d(\quad)=\sin 4t\mathrm{d}t$;

(5) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$; (6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$;

(7) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; (8) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

## 任务解决

**任务一 【人影移动的速率】**(见任务提出)

**解** 这是一个相关变化率的问题.一般地,设 $x=x(t)$ 及 $y=y(x)$ 都是可导函数,而变量 $x$ 与 $y$ 之间存在某种关系,从而变化率$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$与$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$间也存在一定关系,这两个相互依赖的变化率称为相互变化率.

如果我们由几何学或物理学等方面的知识,得到 $x$ 与 $y$ 之间的一个函数关系 $y=f(x)$,且 $f(x)$ 可导,那么由复合函数的求导法则,有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f'(x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

对于所给问题,如图 2-7 所示,以 $DE$ 和 $BC$ 分别表示人高和灯高,以 $DB=x$ 和 $AB=y$ 分别表示人和人影端点到灯的水平距离.

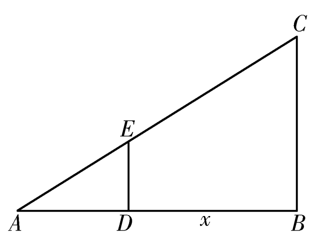


图 2-7

因为$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,所以

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}.$$

从而$\dfrac{y-x}{y}=\dfrac{1.8}{5}$,即 $y=\dfrac{25}{16}x$.

于是

$$\frac{dy}{dt}=\frac{25}{16}\frac{dx}{dt}$$

又依题

$$\frac{dx}{dt}=1.6,$$

故

$$\frac{dy}{dt}=\frac{25}{16}\times1.6=2.5(\mathrm{m/s}).$$

即人影端点移动的速率为 2.5 m/s.

**任务二　【电流强度】**(见任务提出)

**解**　(1)$i(t)=Q'(t)=(t^3-t)'=3t^2-1$;

(2)$i(2)=(3t^2-1)|_{t=2}=11$.

**任务三　【每月向银行多付多少元贷款】**(见任务提出).

**解**　$r=10\%=0.1$,$\Delta r=10.2\%-10\%=0.002$,

$$\Delta p(r)\approx dp(r)=\left(\frac{120\ 000\times\frac{r}{12}}{1-\left(1+\frac{r}{12}\right)^{-360}}\right)'\cdot\Delta r\Bigg|_{\substack{r=0.1\\ \Delta r=0.002}}.$$

由于计算比较繁杂,用 Matlab 数学软件求解:

输入:

```
>>syms r
>>pr=(120000*r/12)/(1-(1+r/12)^(-360));          %每月的还款额 p(r)
>>dpr=diff(pr,r);                %求还款额的导数 p′(r)
>>f=subs(dpr,r,0.1)*0.002;       %计算 Δp(r)
>>f=vpa(f,9)                     %显示每月多交金额的实数值,有效数字 9 位
>>a=f/subs(pr,r,0.1)             %计算多交比例
```

输出:f =17.735199,a =0.01684117

即估算张先生每月向银行多付 17.74 元贷款,多交约 1.68%.

**任务四　【绝对误差和相对误差】**(见任务提出)

**解**　圆面积 $S=\pi\cdot r^2=\frac{\pi}{4}\cdot D^2$,则

$$S'=\frac{\pi}{2}\cdot D.$$

截面积为

$$S=\frac{\pi}{4}\cdot20^2=314(\mu\mathrm{m}^2).$$

截面积的绝对误差

$$\Delta S\approx dS=S'\cdot\Delta D\Big|_{\substack{D=20\\ \Delta D=2}}=\frac{\pi}{2}\cdot D\cdot\Delta D\Big|_{\substack{D=20\\ \Delta D=2}}=\frac{\pi}{2}\times20\times2=62.8(\mu\mathrm{m}^2),$$

截面积的相对误差

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{62.8}{314}=20\%.$$

## 建模案例

# 拉船上岸问题

### 一、问题的提出

如图 2-8 所示,在离水面高度为 $h$(m)的岸上,有人用绳子拉船靠岸.试问:当收绳速度为 $v_0$(m/s)时,船的速度、加速度有什么变化?

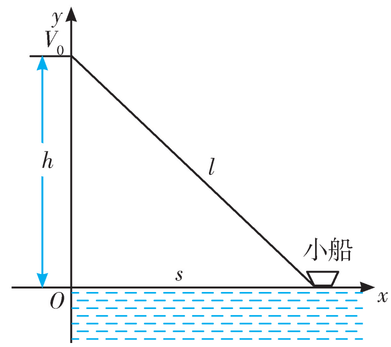


图 2-8

### 二、模型的假设与符号说明

1.模型的假设

(1)假设用绳子拉船时,船在水面上沿直线朝垂直于岸壁的方向行驶;

(2)假设收绳速度 $v_0$(m/s)不变;

(3)假设用绳子拉船时,绳子一直保持直线不松垮;

(4)人在岸上离水面的高度 $h$ 不变.

2.符号说明

$h$:人在岸上离水面的高度;$v_0$:人的收绳速度;$l$:拉船的绳子长度;$s$:船离岸的距离;$t$:拉船时间;$v$:船的速度;$a$:船的加速度.

### 三、问题的分析

结合图 2-8,根据题意可知,$l,h,s$ 构成直角三角形,由勾股定理,可得三者的关系,$l^2=h^2+s^2$,从而建立了数学模型,其中:$h$ 是固定不变的,而 $l$ 和 $s$ 是变化的,随着拉船时间的增加在不断变短.将方程两端同时求关于 $t$ 的导数,即可得收绳速度和船速.再对船速求关于 $t$ 的导数,从而可得船的加速度.

### 四、模型的建立与求解

建立如图 2-8 所示的平面直角坐标系,由图可知,$l,h,s$ 三者构成直角三角形,根据勾股定理,得

$$l^2=h^2+s^2. \tag{1}$$

对(1)式两端同时求关于时间 $t$,得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=0+2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

即

$$l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

依据速度定义,$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$即为收绳速度 $v_0$,由于船在水面上沿直线朝垂直于岸壁的方向行驶,所以$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$为船的速度 $v$,将它们代入(2)式得

$$l\cdot v_0=s\cdot v.$$

即可得船速为

$$v=\frac{l}{s}v_0. \tag{3}$$

利用(1)式消去(3)式中的 $l$,得

$$v=\frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0. \tag{4}$$

(4)式中 $h,v_0$ 均为常数,只有 $s$ 是变量,按照加速度的定义,可得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0\left(-\frac{h^2}{s^2\sqrt{h^2+s^2}}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0h^2}{s^2\sqrt{h^2+s^2}}\cdot v.$$

将(4)式代入上式,得

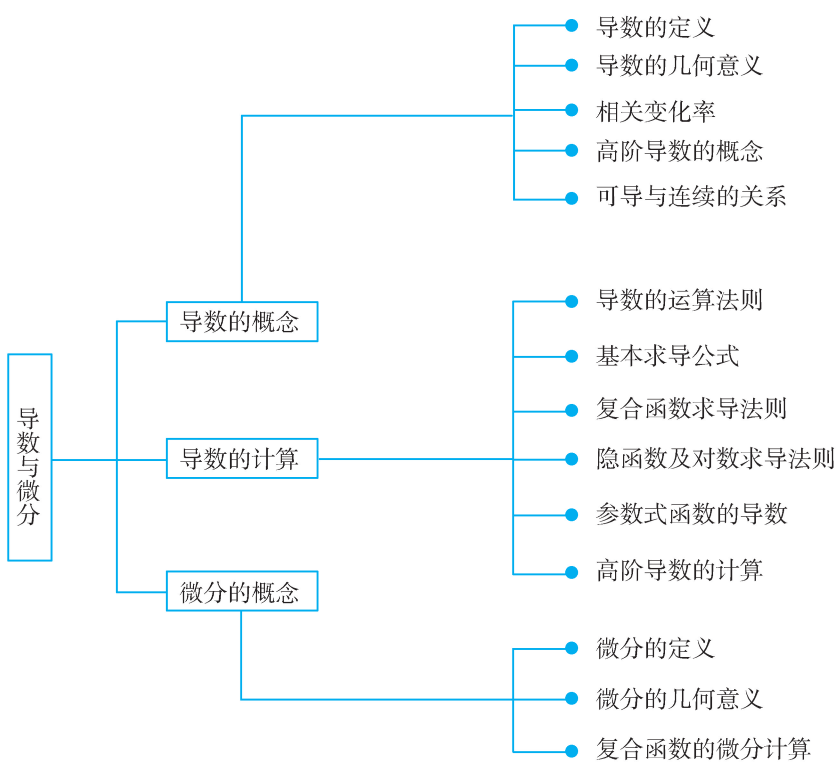
$$a=-\frac{h^2v_0^2}{s^3}. \tag{5}$$

(这里的负号表明加速度的方向与 $x$ 轴正向相反.事实上船速 $v$、收绳速度 $v_0$ 的方向也与 $x$ 轴正向相反.)

### 五、模型的结果分析

由(4)式与(5)式可知,由于 $h,v_0$ 均为常数,所以船速 $v$ 与船的加速度 $a$ 均与船的位置 $s$ 有关,它们随着 $s$ 的变化而变化.当船靠近岸,即 $s$ 不断减小时,船速 $v$ 与船的加速度 $a$ 都不断增加.

## 知识框架



## 单元拓展

### 知识阅读:谁是微积分的创始者?

牛顿作为数学家,被推崇为微积分或者他为之命名的“流数术”的创立者.微积分的起源要追溯到17世纪60年代中期,那时牛顿还是剑桥大学三一学院的一名学生.在那里牛顿专心研究笛卡儿(1596—1650)、约翰·沃利斯(1616—1703)以及三一学院第一位卢卡斯数学教授艾萨克·巴罗(1630—1677)这样一些先驱们的著作,但是很快他发现自己进入了一个从未有人涉足的领域.在接下来的几年中,牛顿永远地改变了数学的面貌.据说牛顿说过这样的话:“如果我比其他人看得更远些,那是因为我站在巨人的肩上.”他确实是站在巨人的肩上,在这些巨人当中,最伟大的有笛卡儿、开普勒和伽利略.从笛卡儿那里,牛顿继承了解析几何;从开普勒那里,他继承了行星运动的三大基本定律,这些定律是经过22年大量的计算后由经验发现的;而从伽利略那里,他得到了成为他自己动力学奠基石的运动三定律中的头两个.对数学来说最重要的是说明第二运动定律的开头的那几个字,变化率.什么是“变化率”,怎样衡量它呢?他对这个问题的解答——对研究以连续方式运动的质点的速度提供了切实可行的数学方法,不管这个质点的运动是多么不规律——使他掌握了揭开变化率及其度量的全部秘密的万能钥匙,这把钥匙就是微分学.怎样计算一个速度每时每刻都在运动的质点在给定的时间内跑过的全部距离呢?在回答这个问题或者其他一些类似的问题(有些是用几何术语描述的)时,牛顿发明了积分学.最后牛顿把这两类问题联系起来考虑,做出了一个重要发现:他看出微分学和积分学通过一个定理,密切而互反地联系在一起,这个定理今天称为“微积分学的基本定理”.

莱布尼茨兴趣广泛,除了哲学和数学,他在历史、法学、语言、神学、逻辑学和外交方面都有杰出的成就.在1672年,他到巴黎担任外交官之前,还是一个被认为对“阅读冗长的数学证明”缺乏耐心的新手.他不满足于自己的知识,花费时间填补缺口,大量阅读令人敬仰的数学家们的著作,远至古代的欧几里得(公元前3世纪前后),近至他那个时代的帕斯卡(1623—1662)、巴罗以及他一度师从的惠更斯(1629—1695).开始的时候困难重重,但是莱布尼茨坚持了下来.他在一段回忆文章中写道,他很快“做好进行独立研究的准备,因为我阅读数学文献就如同别人阅读浪漫的小说一样轻松”.在几乎是狼吞虎咽地吸收同时代的人的成果之后,莱布尼茨把他们远远地抛在后面,创造了微积分,从而使他在数学上赢得名垂青史的业绩.微积分的第一次刊载是莱布尼茨1684年撰写的论文,这篇论文带有一个冗长的标题,翻译过来是《一种求极大值与极小值以及求切线的新方法,它也适用于有理量与无理量以及这种新方法的奇妙类型的计算》.既然涉及求极大值与极小值以及求切线问题,毫无疑问,莱布尼茨的这篇文章是介绍微分法的.两年以后他又发表了另一篇介绍积分法的文章.即使处于早期阶段,莱布尼茨不但构造和整理了许多微积分的基本法则,而且已经用 $\mathrm{d}x$ 表示 $x$ 的微分和用 $\int x\mathrm{d}x$ 表示 $x$ 的积分.他的卓越才能之一,正如后来拉普拉斯所说的提供了“一种非常恰当的符号”.

微积分的两位创始者都因为在其他方面也有建树而更闻名,这也是独一无二的.在公众的心目中,牛顿往往被看成一位物理学家,而微积分的共同创始者莱布尼茨则多半被认为是

一位哲学家.牛顿在17世纪60年代中期已经在剑桥大学建立了他的流数(微积分)思想,而莱布尼茨是在十年之后在巴黎履行外交使命时完成他自己的奠基工作的.这使得牛顿捷足先登,也让牛顿和他的同胞们后来认定这是事关优先权的唯一凭据.但是当莱布尼茨发表他的微积分成果时,牛顿的《分析学》和其他论文仍然以手稿的形式尘封着.关于接着发生的微积分发明权应该归功于哪一位的争论,已有很多著述,而且这并不是一个动听的故事.上百年来,现代学者们终于抹去了国家和个人的感情因素,认定牛顿和莱布尼茨各自独立创建了微积分.

## 单元2复习题

1.判断题:

(1)若曲线 $y=f(x)$ 处处有切线,则函数 $y=f(x)$ 处处可导.　(　　)

(2)函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续但不可导.　(　　)

(3)$(5^x+5^4)'=x\cdot 5^{x-1}+5x^4$.　(　　)

(4)设物体沿直线运动,在时刻 $t$(s)的速度为 $v=7+2t$(m/s),则在时刻 $t$ 的加速度是 2 $m/s^2$.　(　　)

(5)若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导,则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可微.　(　　)

(6)$f'(x_0)=[f(x_0)]'$.　(　　)

2.选择题:

(1)设 $f(0)=0$,且 $f'(0)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$(　　).

A.$f'(x)$　　B.$f'(0)$　　C.$f(0)$　　D.$\dfrac{1}{2}f(0)$

(2)设 $f(x)=e^{\sqrt{x}}$,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$(　　).

A.2e　　B.e　　C.$\dfrac{1}{2}$e　　D.$\dfrac{1}{4}$e

(3)$f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导的(　　).

A.必要条件　　B.充分条件　　C.充要条件　　D.无关条件

(4)设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导,则在 $x=2$ 处有微小增量 $\Delta x$ 时,函数的增量约为(　　).

A.$f'(2)$　　B.$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$　　C.$f(2+\Delta x)$　　D.$f'(2)\Delta x$

(5)下列函数中(　　)的导数等于 $\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

A.$\dfrac{1}{2}\sin^2 x$　　B.$\dfrac{1}{2}\cos 2x$　　C.$\dfrac{1}{2}\sin 2x$　　D.$\dfrac{1}{2}\cos^2 x$

(6)设 $y=f(x^2)$,则 $dy=$(　　).

A.$xf'(x^2)dx$　　B.$2xf'(x^2)dx$　　C.$xf'(x)dx$　　D.$2xf'(x)dx$

(7)设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$,则 $f'(x)=$(　　).

A.$\dfrac{1}{x}$　　B.$-\dfrac{1}{x}$　　C.$\dfrac{1}{x^2}$　　D.$-\dfrac{1}{x^2}$

(8)设 $y=10^x$,则 $y'=($　　$)$.

A.$\dfrac{10^x}{\ln 10}$　　B.$10^x\lg 10$　　C.$10^x\ln 10$　　D.$10^x$

(9)设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,则 $f'\left(\dfrac{1}{\pi}\right)=($　　$)$.

A.1　　B.$-1$　　C.$\pi^2$　　D.$-\pi^2$

(10)设 $y=\cos(3-x)$,则 $y''=($　　$)$.

A.$\cos(3-x)$　　B.$-\cos(3-x)$　　C.$\sin(3-x)$　　D.$-\sin(3-x)$

(11)设 $y=f(x)$是由方程 $x^2-xy=1$ 确定的函数,则 $y'=($　　$)$.

A.$2x$　　B.$-2x$　　C.$\dfrac{1}{x}(2x-y)$　　D.$\dfrac{1}{x}(y-2x)$

(12)设 $y=e^{ax}$,则 $y^{(n)}=($　　$)$.

A.$ae^{ax}$　　B.$a^ne^{ax}$　　C.$e^{ax}$　　D.$a^2e^{ax}$

(13)设 $x$ 为自变量,当 $x=1,\Delta x=0.1$ 时,$d(x^3)=($　　$)$.

A.0.3　　B.0　　C.0.01　　D.0.03

(14)下列结论中不正确的是(　　).

A.若函数 $f(x)$在点 $x_0$ 可微,则 $f(x)$在点 $x_0$ 可导

B.若函数 $f(x)$在点 $x_0$ 可导,则 $f(x)$在点 $x_0$ 可微

C.若函数 $f(x)$在点 $x_0$ 连续,则 $f(x)$在点 $x_0$ 可微

D.若函数 $f(x)$在点 $x_0$ 可微,则 $f(x)$在点 $x_0$ 连续

(15)设函数 $f(x)$在点 $x_0$ 可微,则 $f(x)$在 $x_0$ 的微分式是(　　).

A.$f(x_0)$;　　B.$\Delta y$;　　C.$f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$;　　D.$f'(x_0)\Delta x$.

3.填空题:

(1)曲线 $y=\tan x$ 在$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$点处的切线斜率为________.

(2)已知函数 $f(x)=\ln(\ln x)$,则 $f'(e)=$________.

(3)设 $y=f(x)$是由方程 $xy=x+1$ 确定的函数,则$\dfrac{dy}{dx}=$________.

(4)$\dfrac{d(\ln x)}{d(\sqrt{x})}=$________.

(5)设 $f(x)=\ln(1+x)$,则 $f''(0)=$________.

(6)设 $f(x)=e^x\sin x$,则 $f''(0)=$________.

(7)设 $y=\ln(9x-8)$,则 $dy=$________.

(8)设 $y=\sin^2(3x+5)$,则 $dy=$________.

4.一杯牛奶在微波炉中加热后拿出放在桌上,$t$ 分钟后牛奶的温度为 $T(t)=75e^{-0.02t}$(单位:℃).

(1)$T'(t)$的单位是什么?

(2)求出 $T'(20)$(保留整数)并说明这一数值的具体实际意义.

5.在火星表面附近,自由落体的运动方程是 $s=1.86t^2$,$s$ 和 $t$ 的单位分别是 m 和 s.设一石块从距离火星表面 100 m 高的悬崖上自由落下.

(1)石块下落速度达到 18.6 m/s 用了多长时间?

(2)在下落过程中石块的加速度是多少?

6.求下列函数的导数:

(1)$y=x+\ln x$;　　(2)$y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;　　(3)$y=\dfrac{5x}{1+x^2}$;

(4)$y=e^{\cos\frac{x}{2}}$;　　(5)$y=\sin^2x+\cos x^2$;　　(6)$y=x^2e^{-\frac{1}{x}}$;

(7)$y=\arcsin(x^2)$;　　(8)$y=\sin(\ln\sqrt{x})$;　　(9)$y=\ln(\arcsin e^x)$.

7.求隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$:

(1)$x^2-y^3=4$;　　(2)$e^y=x^2y+\sin y$;　　(3)$xy=e^{x+y}$.

8.求曲线在指定点处的切线方程:

(1)$y=\ln(x^2-8)$,点(3,0);　　(2)$y=2\sin x+x^2$,点(0,0);

(3)$ye^x+\ln y=1$,点(0,1);　　(4)$\begin{cases}x=e^t,\\y=(t-1)^2,\end{cases}$ $t=0$ 时的点.

9.求指定的高阶导数:

(1)$y=\ln x$,$y'''$;　　(2)$y=x^2e^x$,$y''$;　　(3)$y=\dfrac{1}{1+x^2}$,$y''$.

10.求曲线 $y=e^{2x-1}$的与直线 $2x-y+1=0$ 平行的切线方程.

11.曲线 $y=2+\ln(1-3x)$上哪一点处的切线与直线 $x-3y+3=0$ 垂直.

12.某电器厂在对冰箱制冷后断电测试其制冷效果,$t$ 小时后冰箱的温度(单位:℃)为 $T=\dfrac{4t}{0.1t+2}+10$,问冰箱温度 $T$ 关于时间 $t$ 的变化率是多少?

13.某同学在上网时,通过下载一个文件对自家的网速进行简单的测试,观察得到文件的下载量 $y$(KB)与时间 $t$(s)的关系如下表:

| 时间 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 下载量 | 0 | 600 | 1120 | 1560 | 1920 | 2200 |

根据上述数据用拟合方法可得下载量 $y$ 与时间 $t$ 的函数关系为 $y=320t-10t^2$.

试求:(1)下载速度 $v$(KB/s)与时间 $t$(s)的函数关系;

(2)第 5 s 时刻的瞬时下载速度.