人文素养提升教程
——高等数学

主编 彭 鹏 易 静 许宇翔

航空工业出版社

人文素养提升教程
——高等数学

主编　彭　鹏　易　静　许宇翔

航空工业出版社
北　京

内 容 提 要

本教材根据四川省专升本考试大纲编写，全面覆盖高等数学与线性代数核心知识，如函数极限、导数微分、积分学、级数、微分方程等内容，注重理论结合实践，融入大量例题和历年真题，旨在帮助学生深化理解和提升解题技巧。本教材内容结构尊重学生认知规律，循序渐进引导学习，从基础开始，逐步深入，同时特邀资深教师参与编写，分享教学心得，丰富学习视角。相信本教材能帮助四川专升本学子扎实掌握数学基础，提升解题能力和数学素养，成为他们通向成功道路的得力助手。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 彭鹏，易静，许宇翔主编 . -- 北京 :
航空工业出版社，2024.8. -- (人文素养提升教程).
ISBN 978-7-5165-3814-2
Ⅰ. O13
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20242LS670 号

人文素养提升教程——高等数学
Renwen Suyang Tisheng Jiaocheng——Gaodeng Shuxue

航空工业出版社出版发行
（北京市朝阳区京顺路 5 号曙光大厦 C 座四层　100028）
发行部电话：010-85672666　010-85672683

北京荣玉印刷有限公司印刷　　全国各地新华书店经售
2024 年 8 月第 1 版　　2024 年 8 月第 1 次印刷
开本：889×1194　1/16　　字数：489 千字
印张：17　　定价：68.00 元

前 言

在知识更迭日新月异的时代背景下，教育作为个人成长与职业发展的坚固基石，其重要性愈发显得不可或缺。对于那些怀揣高远志向、渴望在职业生涯中翱翔九天的高职学子而言，一条系统化、条理清晰的学习路径无疑是他们跨越梦想鸿沟、抵达成功彼岸的坚实桥梁。正是基于这一深刻洞察，我们匠心独运，精心编纂了这本旨在全方位提升学生数学综合素养、为其升学之路添砖加瓦的教材。

本书在编写上具有以下特色。

1. 精准对接，系统构建知识体系

本书严格遵循专升本数学考试大纲，对考试范围内的知识点进行了全面而细致的梳理与分类。从基础概念的稳固根基到高深理论的深入探索，从计算方法的熟练掌握到应用技巧的灵活运用，力求做到内容全面无遗漏，结构清晰有条理。通过科学合理的章节划分与专题设置，帮助学生构建起一座层次分明、逻辑严密的数学知识殿堂，让学习之路既清晰又高效。

2. 真题融入，实战演练提升技能

为了让学生更好地适应考试节奏、掌握解题精髓，我们精心挑选了历年各高校专升本数学升学考试的真题作为实战演练的宝贵资源。这些真题不仅精准反映了考试的难度与趋势，更蕴含了丰富的解题智慧与策略。本书通过对真题的深入剖析与精辟解读，引导学生把握解题规律、掌握技巧精髓，从而在实战中提高解题效率与准确性。此外，本书还特别设置了基础沉淀、考点突破、实战演练、答案大揭秘等多个环节，让学生在循序渐进中检验学习成果、查漏补缺、巩固提升。

3. 技巧分享，心得交流共促成长

在编写过程中，本书尤为注重解题技巧与心得体会的分享与传承，依托编者多年积累的丰富教学经验与深刻教学反思，总结提炼了一系列高效实用的解题策略与方法。这些技巧涵盖了快速审题、精准定位、巧妙转化、灵活应用等多个方面，旨在帮助学生轻松应对各种复杂多变的数学问题。同时，我们也鼓励学生积极分享自己的学习心得与解题经验，通过交流互动激发思维火花，促进共同成长。

4. 强化实践，学以致用展现价值

我们深知理论知识的学习唯有与实践相结合，方能彰显其最大价值。因此，本书在章节末尾精心设计了大量练习题与历年考题，旨在引导学生将所学知识应用于解决实际问题的过程中。通过这一环节的设置，可以加深学生对数学知识的理解与掌握程度，培养他们的数学素养与综合能力，激发他们的学习兴趣与探索欲望。

5. 人文关怀，陪伴成长共筑梦想

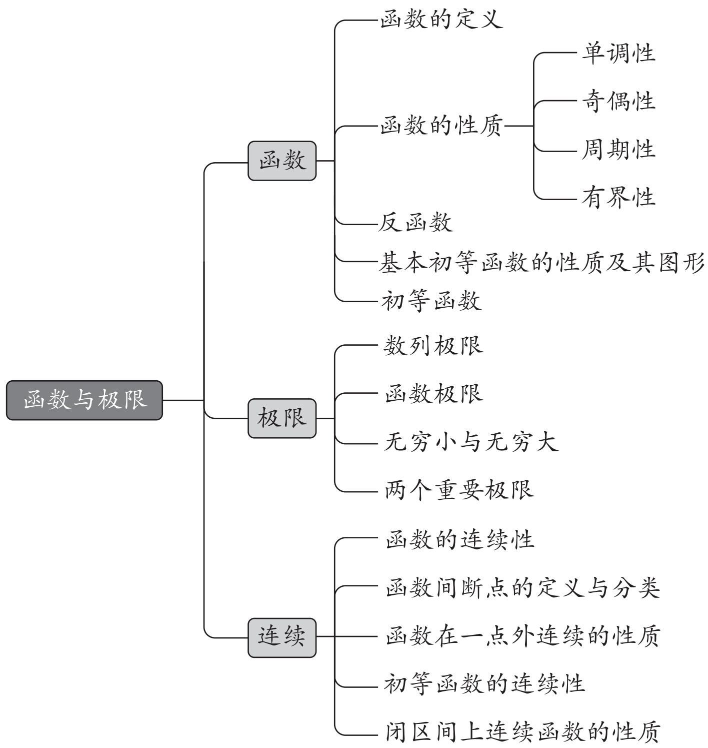
在追求卓越学术成就的同时，始终不忘关注学生的心理健康与全面发展。我们深知学习之路虽充满挑战与艰辛，但亦不乏机遇与希望。因此，我们愿以这本书为媒介成为学生们升学之路上的良师益友，陪伴他们度过每一个挑战与成长的瞬间。期待通过我们的努力，能够为学生们提供强有力的精神支持与帮助，让他们在追求梦想的道路上更加坚定自信、勇往直前。

最后，我们衷心感谢所有参与本书编写、审校工作的专家、学者及同仁们的辛勤付出与无私奉献。正是有了你们的智慧与汗水才使得这本教材得以顺利问世，并以其系统化的内容、分类化的结构、丰富的真题资源以及实用的解题技巧为广大高职学子提供了宝贵的学习资源与支持。愿每一位学子都能在这段学习旅程中收获满满，成长蜕变，成就辉煌未来！

目　录

第 1 章　函数与极限

知识概览



1.1 函数

基础沉淀

1.1.1　函数的概念

1. 函数的概念

定义 1.1.1　如果 D，W 是非空的数集，如果按某个确定的对应关系 f，使得对于集合 D 中的任意一个数 x，在集合 W 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: D \to W$ 为从集合 D 到集合 W 的一个函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 D 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合 $W=\{f(x)|x\in D\}$ 叫做函数的值域 .

2. 函数的两要素

函数的定义域 D 与对应法则 f 唯一确定 $y=f(x)$，因此，函数的定义域与对应法则称为函数的两要素 . 如果函数的两个要素都相同，则称它们是相同的函数，否则称为不同函数 .

例如函数 $f(x)=x+2$ 与函数 $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$，虽然 $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ 经过化简后 $g(x)=x+2$，两个函数的关系式相同，但是 $g(x)$ 的定义域是 $\{x\,|\,x\neq 2\}$，而 $f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)\neq g(x)$.

再例如函数 $u=5v+1$，对应法则是乘以 5 加 1，与 $y=5x+1$ 完全相同，它们的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\mathbf{R}$，所以它们是同一个函数 .

由以上例子可见，两个函数是否相同，只需要看它们的定义域与对应法则是否完全相同，而与自变量和因变量用什么字母表示没有关系 .

函数定义域应注意的几点：

（1）若 $y=\sqrt[2n]{g(x)}$，则 $g(x)\geqslant 0$，$n\in\mathbf{N}^+$；

（2）若 $y=\frac{A}{g(x)}$，则 $g(x)\neq 0$；

（3）若 $y=\log_a g(x)$，则 $g(x)>0$，$a>0$，$a\neq 1$；

（4）若 $y=\log_{g(x)} N$，则 $g(x)>0$ 且 $g(x)\neq 1$，$N>0$；

（5）若 $y=\tan g(x)$，则 $g(x)\neq k\pi\pm\frac{\pi}{2}$；

（6）若 $y=\cot g(x)$，则 $g(x)\neq k\pi$；

（7）若 $y=\arcsin g(x)$，则 $|g(x)|\leqslant 1$；

（8）若 $y=\arccos g(x)$，则 $|g(x)|\leqslant 1$.

如果函数表达式同时含有以上的几种情况，则应取各个部分定义域的交集 .

例 1.1.1　下列各函数中，哪一个函数与 $y=x-3$ 是同一个函数 .

（1）$y=\frac{x^2-9}{x+3}$　　（2）$y=x-3\ (x<0)$　　（3）$s=t-3$

解：先认清，它的定义域是 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$；再看（1）定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$，它们是不同的；（2）定义域为 $\{x\,|\,x<0\}$，是不同的；而（3）定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\mathbf{R}$，对应法则是减 3，与 $y=x-3$ 完全相同 .

例 1.1.2　求下列各函数的定义域 .

（1）$y=\frac{5}{\sqrt{16-x^2}}-\sqrt{x+1}$　　（2）$y=\frac{2x+5}{2x-5}+\ln(x-2)$

（1）解：要使函数有意义，只要 $\begin{cases}16-x^2>0\\ x+1\geqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-4<x<4\\ x\geqslant -1\end{cases}$，所以函数的定义域是 $[-1,4)$.

（2）解：要使函数有意义，只要 $\begin{cases}2x-5\neq 0\\ x-2>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>2\\ x\neq\frac{5}{2}\end{cases}$，所以函数的定义域是 $(2,\frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2},+\infty)$.

例 1.1.3　若函数 $f(x)=2x+3$，求 $f(2)$，$f(a)$，$f(f(a))$.

解：$f(2)=2\times 2+3=7$；

$f(a)=2a+3$；

$f(f(a))=2f(a)+3=2(2a+3)+3=4a+9.$

3. 反函数

定义 1.1.2　函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 中，设它的值域为 W，我们根据这个函数中 x，y 的关系，用 y 把 x 表示出来，得到 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 W 中的任何一个值，通过 $x=\varphi(y)$，使得 x 在 D 中都有唯一的值和它对应，那么 $x=\varphi(y)$ 就表示 y 是自变量，x 是自变量 y 的函数 . 这样的函数 $x=\varphi(y)\ (y\in W)$ 叫做函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的反函数，记作：$x=f^{-1}(y)$. 考虑到“用 x 表示自变量，y 表示函数”的习惯，将

$x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调写成 $y=f^{-1}(x)$.

注 1：易见反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域 W 即是原来函数 $y=f(x)$ 的值域，而其值域即是原来函数的定义域 D.

注 2：为了符合我们的习惯，常把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 换为 y，把 y 换为 x，从而得 $y=f^{-1}(x)$. 由于并不改变其定义域和对应法则，所以它们是相同的函数.

1）反函数的性质

（1）严格单调函数必有反函数，且其反函数的单调性与原来函数的单调性一致.

（2）函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

2）反函数的求法

（1）从 $y=f(x)$ 中解出 x；

（2）判断 $x=\varphi(y)$ 中的 y 与 x 是否一一对应；

（3）如果是一一对应，则交换 x，y 即得反函数.

例如 $y=2x$ 的反函数为 $y=\dfrac{x}{2}$，$y=a^x$ 的反函数为 $x=\log_a y$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

1.1.2　基本初等函数

1. 基本初等函数

（1）幂函数　　$y=x^a$（a 是常数）

（2）指数函数　　$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

　　$y=\mathrm{e}^x$（e 是无理数，e=2.71828182845904…）

（3）对数函数　　$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

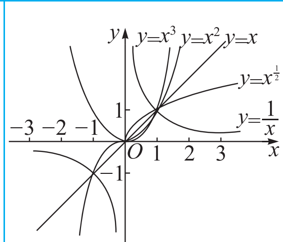
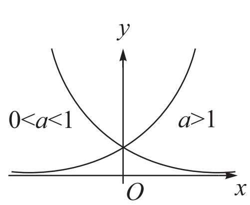
　　常用对数　　$y=\lg x$（以 10 为底 x 的对数）

　　自然对数　　$y=\ln x$（以 e 为底 x 的对数）

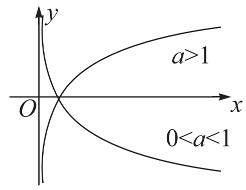
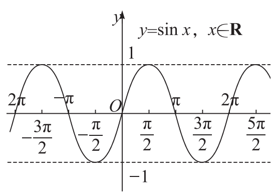
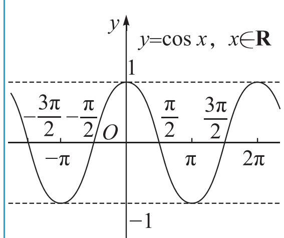
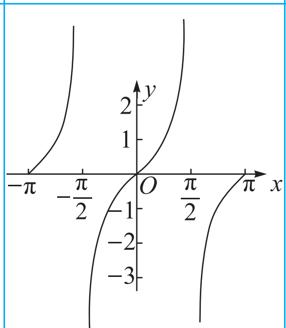
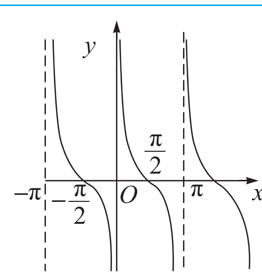
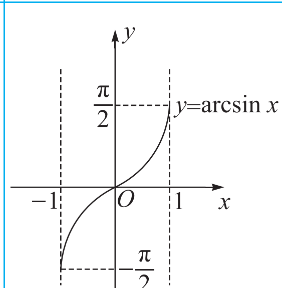
（4）三角函数　　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

（5）反三角函数　　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

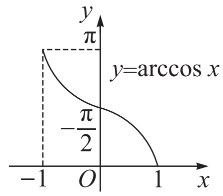
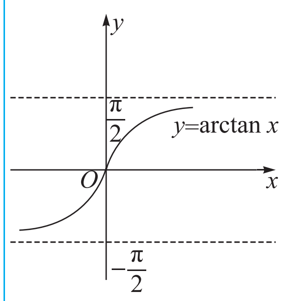
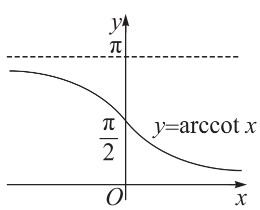
以上五类函数称为基本初等函数.

函数	函数图象	定义域和值域	函数的性质	渐近线方程
幂函数 $y=x^a$（$a\in R$）			恒过点（1,1）	
指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）		$x\in\mathbf{R}$ $y\in(0,+\infty)$	非奇非偶函数，恒过点（0,1） $a>1$ 时单调递增， $0<a<1$ 时单调递减	$y=0$（水平渐近线）

续表

函数	函数图象	定义域和值域	函数的性质	渐近线方程
对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq1$）		$x>0$ $y\in\mathbf{R}$	非奇非偶，恒过点（1,0） $a>1$ 时单调递增， $0<a<1$ 时单调递减	$x=0$（垂直渐近线）
正弦函数 $y=\sin x$		$x\in\mathbf{R}$ $y\in[-1,1]$	奇函数，周期：$T=2\pi$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增； 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 上单调递减	
余弦函数 $y=\cos x$		$x\in\mathbf{R}$ $y\in[-1,1]$	偶函数，周期：$T=2\pi$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减； 在 $[\pi,2\pi)$ 上单调递增	
正切函数 $y=\tan x$		$x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ $y\in\mathbf{R}$	奇函数，周期：$T=\pi$ 在每一个周期（$k\pi-\frac{\pi}{2}$, $k\pi+\frac{\pi}{2}$）内单调递增	$x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ 是铅直渐近线（即垂直渐进线）
余切函数 $y=\cot x$		$x\neq k\pi$ $y\in\mathbf{R}$	奇函数，周期：$T=\pi$ 在每一个周期（$k\pi,k\pi+\pi$）内单调递减	$x=k\pi$ 是铅直渐近线
反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	奇函数，有界，在 $[-1,1]$ 上单调递增	

续表

函数	函数图象	定义域和值域	函数的性质	渐近线方程
反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$	非奇非偶，有界，在 $[-1,1]$ 上单调递减	
反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	奇函数，有界，在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增	$y=-\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=\dfrac{\pi}{2}$（水平渐近线）
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$	非奇非偶，有界，$(-\infty,+\infty)$ 上单调递减	$y=0$ 和 $y=\pi$（水平渐近线）

2. 函数的性质

1）函数的奇偶性

设 $y=f(x)$ 的定义域是 D，且对于任意 $x\in D$ 有 $-x\in D$，若对于任意的 $x\in D$ 恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数；若对于任意 $x\in D$ 恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果函数既不是奇函数也不是偶函数，那么我们称它为非奇非偶函数．

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称．

2）函数的单调性

设 $y=f(x)$ 的定义域是 D，$(a,b)\subseteq D$，对于任意的 x_1，$x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$，

若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递增函数．

若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递减函数．

注意：函数的单调性是局部概念，是针对定义域的特定的子区间而言的，在某个子区间上单调递增（递减），不一定在整个定义域内单调递增（递减）．例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增，但是在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调的．

3）函数的周期性

设 D 为 $f(x)$ 的定义域，若存在 T 且 $(x+T)\in D$（$T\neq0$）使得 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，又称周期函数，周期中最小的正数为函数的最小正周期．例如 $y=2\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|4|}=\dfrac{\pi}{2}$，$y=3\tan\left(-2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{\pi}{|-2|}=\dfrac{\pi}{2}$.

4）函数的有界性

若存在常数 M（$M>0$）使得对于任意的 $x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，否则

称 $f(x)$ 为 D 上的无界函数 .

例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在（0,1）内为无界函数，在（1,2）内则为有界函数 .

1.1.3 复合函数与分段函数

若函数 $y=u^3$，$u=2x+1$，将 $2x+1$ 代替 u，得到函数 $y=(2x+1)^3$，我们称它是由 $y=u^3$，$u=2x+1$ 复合而成的复合函数 .

定义 1.1.3 设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果函数 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集为非空数集，那么我们称 y 叫做 x 的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$，其中 u 叫做中间变量.

例 1.1.4 求出由函数 $y=3^u$，$u=\cos x$ 复合而成的函数.

解：由于函数 $u=\cos x$ 的值域与 $y=3^u$ 定义域的交集为非空数集，所以将 $u=\cos x$ 代入 $y=3^u$ 中，即可得到所求的复合函数 $y=3^{\cos x}$.

例 1.1.5 求出函数 $y=2^u$，$u=\ln t$，$t=x^2+2$ 复合而成的函数.

解：将 $t=x^2+2$ 代入 $u=\ln t$ 得到 $u=\ln(x^2+2)$，再将 $u=\ln(x^2+2)$，代入 $y=2^u$，得到所求的复合函数 $y=2^{\ln(x^2+2)}$.

一个复合函数也可以由三个及以上函数复合而成，但是一定要满足构成复合函数的基本条件，否则不能够构成复合函数.

例如 $y=\ln u$，$u=-1-x^2$ 就不能够构成复合函数，因为 $u=-1-x^2$ 的值域与 $y=\ln u$ 的定义域的交集为空集，因此它们不能够构成复合函数.

例 1.1.6 指出下列复合函数的结构.

（1）$y=\sin(2x+3)$ （2）$y=\ln\cos(x+2)$

（3）$y=3^{\ln\sin(2+x^2)}$ （4）$y=\log_3 2^{\cos^3(2x+3)}$

（1）解：$y=\sin(2x+3)$ 由 $y=\sin u$，$u=2x+3$ 复合而成.

（2）解：$y=\ln\cos(x+2)$ 由 $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=x+2$ 复合而成.

（3）解：$y=3^{\ln\sin(2+x^2)}$ 由 $y=3^u$，$u=\ln v$，$v=\sin w$，$w=2+x^2$ 复合而成.

（4）解：$y=\log_3 2^{\cos^3(2x+3)}$ 由 $y=\log_3 u$，$u=2^v$，$v=w^3$，$w=\cos t$，$t=2x+3$ 复合而成.

定义 1.1.4 由常数和基本初等函数，经过有限次复合或有限次的四则运算构成的，并且能用一个解析式表示出来的函数，称为初等函数.

例如 $y=\log_3 x+\sin^2 x+4$，$y=\dfrac{2\ln x+\sqrt{x^2+4}}{x\tan x-1}$ 都是初等函数.

一般地，分段函数（分段定义的函数）不是初等函数. 但是，如果一个分段函数，可以化成用一个解析式表示的函数，那么它也是初等函数.

例如由于分段函数 $\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 可化为 $y=|x|, x\in(-\infty,+\infty)$，易知 $y=|x|$ 是一个初等函数，所以说，分段函数也可能是初等函数 . 而分段函数 $y=\begin{cases} 2x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 则不是一个初等函数 .

考点突破

考点一　求函数的定义域与相同函数的判断

提分秘籍

1. 已知函数解析式求定义域，一般遵循下面原则，列出不等式组解不等式 .

（1）分式：分母不为 0

（2）根式：开偶次方根，被开方数大于等于 0

（3）对数：对数的真数大于 0，底数大于 0 且不等于 1

（4）指数：指数的底数大于 0 且不等于 1

（5）x^0：$x^0=1$，$x\neq 0$

（6）正切：$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

（7）反正弦、反余弦：定义域为 $[-1,1]$

2. 求函数定义域的注意点:

（1）不要对解析式进行化简变形，以免定义域变化 .

（2）当一个函数由有限个基本初等函数的和、差、积、商的形式构成时，定义域一般是各个基本初等函数定义域的交集 .

（3）定义域是一个集合，要用集合或区间表示，若用区间表示，不能用“或”连接，而应该用并集符号“U”连接 .

3. 判断两个是否函数相同，具体做法:

首先判断定义域是否相同，再判断对应法则是否相同，只有它们相同时，两个函数才是相同函数 .

【例 1】 函数 $f(x)=\ln(x-1)+\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$ 的定义域为________________.

【答案】$[2,3)\cup(3,+\infty)$

【解析】要使函数 $f(x)=\ln(x-1)+\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$ 有意义，就必须同时满足

$\begin{cases}x-1>0\\x-2\geqslant 0\\x-3\neq 0\end{cases}$，即 $2\leqslant x<3$ 或 $x>3$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2,3)\cup(3,+\infty)$.

【例 2】 下列函数相同的是（　　）.

A. $y=\sqrt{x^2}$，$y=x$　　B. $y=\sqrt{x^2}$，$y=|x|$

C. $y=\sqrt{x^2}$，$y=(\sqrt{x})^2$　　D. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$y=x+1$

【答案】B

【解析】A 选项中尽管定义域相同，但是对应关系不一样，所以它们不是相同函数；C 选项中由于定义域不同，所以它们不是相同函数；D 选项中由于定义域不同，所以它们不是相同函数 .

考点二　抽象函数的定义域

提分秘籍

抽象函数、复合函数的定义域：

①已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f[g(x)]$ 的定义域，具体做法：由 $f(x)$ 中的 $a\leqslant x\leqslant b$ 得出 $a\leqslant g(x)\leqslant b$，则 $g(x)$ 中的 x 的取值范围即为函数 $f[g(x)]$ 的定义域 .

②已知 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f(x)$ 的定义域，具体做法：由 $f[g(x)]$ 中的 $a\leqslant x\leqslant b$ 得出 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域，即为函数 $f(x)$ 的定义域 .

【例 3】 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为________________ .

【答案】$(-1,-\frac{1}{2})$

【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，故要使函数 $f(2x+1)$ 有意义只需 $-1<2x+1<0$ 即可，解得 $-1<x<-\frac{1}{2}$.

【例 4】 若函数 $y=f(3-2x)$ 的定义域为 $[-1,2]$，则函数 $y=f(x)$ 的定义域是________________ .

【答案】$[-1,5]$

【解析】因为 $y=f(3-2x)$ 的定义域为 $[-1,2]$，所以 $-1\leqslant 3-2x\leqslant 5$，所以函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1,5]$.

【例 5】 已知函数 $f(x-1)$ 的定义域为 $[-2,3]$，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为________________ .

【答案】$\left[-2,\frac{1}{2}\right]$

【解析】由于函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $[-2,3]$，得 $-2\leqslant x\leqslant 3$，则 $-3\leqslant x-1\leqslant 2$.

对于 $y=f(2x+1)$，有 $-3\leqslant 2x+1\leqslant 2$，解得 $-2\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$，即 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[-2,\frac{1}{2}\right]$.

考点三　根据定义域求参数

【例 6】 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-\log_a(x-1)}}$ 的定义域为 $(1,10)$，则实数 a 的值为________________ .

【答案】3

【解析】由题意知，函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-\log_a(x-1)}}$ 有意义，满足 $\begin{cases}2-\log_a(x-1)>0\\x-1>0\end{cases}$，

又由于函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,10)$，所以 $\log_a(10-1)=2$，解得 $a=3$.

【例 7】 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{ax^2+2ax+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________________ .

【答案】$[0,1)$

【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，又因为使 $f(x)$ 有意义需 $ax^2+2ax+1\neq 0$，所以 $ax^2+2ax+1=0$ 无解，当 $a=0$ 时，方程无解，符合题意；当 $a\neq 0$ 时，$\Delta=4a^2-4a<0$，解得 $0<a<1$，综上所述 $0\leqslant a<1$.

【例 8】 若函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{mx^2-mx+2}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 m 取值范围是________________ .

【答案】$[0,8)$

【解析】$\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ $\therefore$ 不等式 $mx^2-mx+2>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$

① $m=0$ 时，$2>0$ 恒成立，满足题意；

② $m\neq 0$ 时，则$\begin{cases} m>0 \\ \Delta=m^2-8m<0 \end{cases}$，解得 $0<m<8$；

综上得，实数 m 的取值范围是 $[0,8)$.

考点四　求函数的表达式

提分秘籍

函数解析式的求法:

（1）待定系数法：若已知函数的类型，可用待定系数法 .

（2）换元法：已知复合函数 $f(g(x))$ 的解析式，可用换元法，此时要注意新元的取值范围 .

（3）配凑法：由已知条件 $f(g(x))=F(x)$，可将 $F(x)$ 改写成关于 $g(x)$的表达式，然后以 x 替代 $g(x)$，便得 $f(x)$ 的解析式 .

（4）方程组法：已知 $f(x)$ 满足某个等式，这个等式除 $f(x)$ 是未知量外，还有其他未知量，如 $f(\frac{1}{x})$，$f(-x)$ 等，可根据已知等式再构造其他等式组成方程组，通过解方程组求出 .

1. 待定系数法求解函数的表达式

【例 9】 若 $f(x)$是一次函数，$f(f(x))=4x-1$，则 $f(x)=$ ________________.

【答案】$f(x)=2x-\frac{1}{3}$ 或 $f(x)=-2x+1$

【解析】设 $f(x)=kx+b$（$k\neq 0$），由题意可知

$f(f(x))=f(kx+b)=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b=4x-1$，

由待定系数可知$\begin{cases} k^2=4 \\ kb+b=-1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} k=2 \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$或者$\begin{cases} k=-2 \\ b=1 \end{cases}$，

所以 $f(x)=2x-\frac{1}{3}$ 或者 $f(x)=-2x+1$.

2. 换元法求解函数的表达式

【例 10】 若函数$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$，则 $f(x)=$ ________________.

【答案】$\frac{1-x}{1+x}$（$x\neq -1$）

【解析】利用换元法，令 $t=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$，再用 t 表示 x 代入原函数即可得 $f(x)$.

【解析】令 $t=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$，则 $t\neq -1$，

$\therefore x=\frac{2}{t+1}-1$，故 $f(t)=\frac{2}{t+1}-1=\frac{1-t}{t+1}$，

$\therefore f(t)=\frac{1-x}{x+1}$（$x\neq -1$）.

故答案为：$\frac{1-x}{x+1}$（$x\neq -1$）.

3. 赋值法求解函数的表达式

【例 11】 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(0)=1$，并且对任意的实数 x，y 都有 $f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$，求函数 $f(x)$ 的解析式.

【答案】$f(x)=x+x+1$

【解析】令 $y=x$，则 $f(x-y)=f(0)=f(x)-x(2x-x+1)$，

$\therefore f(x)=x^2+x+1$.

4. 配凑法求函数的表达式

【例 12】 已知函数 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=($　　$)$.

A. $\dfrac{22}{9}$　　B. 4　　C. $\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{97}{36}$

【答案】A

【分析】求出函数的解析式，然后求解函数值即可.

【解析】函数 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$，

所以 $f(x)=x^2+2$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{9}+2=\dfrac{22}{9}$.

故选 A.

考点五　函数的性质

提分秘籍

1. 函数单调性的判断方法：

（1）定义法；

（2）图象法；

（3）利用已知函数的单调性；

（4）导数法.

2. 复合函数 $y=f(g(x))$ 的单调性应根据外层函数 $y=f(t)$ 和内层函数 $t=g(x)$ 的单调性判断，遵循“同增异减”的原则.

3. 注意事项:

（1）求函数的单调区间，应先求定义域，在定义域内求单调区间.

（2）单调区间不用U连接，用“和”或“,”连接.

1. 函数的单调性

提分秘籍

（1）基本初等函数的单调性

① 正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$

当 $k>0$ 时，函数 $y=kx$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 是增函数；当 $k<0$ 时，函数 $y=kx$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 是减函数.

② 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$

当 $k>0$ 时，函数 $y=kx+b$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 是增函数；当 $k<0$ 时，函数 $y=kx+b$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 是减函数.

③ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$

当 $k>0$ 时，函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，不存在单调增区间；

当 $k<0$ 时，函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，不存在单调减区间 .

④ 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

若 $a>0$，在区间 $(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$，函数是减函数；在区间 $[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$，函数是增函数；

若 $a<0$，在区间 $(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$，函数是增函数；在区间 $[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$，函数是减函数 .

（2）函数单调性一些常见结论

① 若 $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；若 $f(x)$ 是减函数，则 $-f(x)$ 为增函数；

② 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增（或减）函数，则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增（或减）函数；

③ 若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为减函数；若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为增函数 .

题型一　函数单调性的判断和证明

【例 13】 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

（1）判断函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明其结论；

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $[2,9]$ 上的值域.

【答案】（1）函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数 .（2）函数 $f(x)$ 在区间 $[2,9]$ 上的值域为 $[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}]$.

【解析】（1）函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数 .

证明：任取 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1-3}{x_1+1}-\frac{2x_2-3}{x_2+1}=\frac{(2x_1-3)(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}-\frac{(2x_2-3)(x_1+1)}{(x_2+1)(x_1+1)}=\frac{5(x_1-x_2)}{(x_2+1)(x_1+1)},$$

$\because x_1-x_2<0$，$(x_1+1)(x_2+1)>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数 .

（2）由（1）知函数 $f(x)$ 在区间 $[2,9]$ 上是增函数，

又 $f(2)=\dfrac{2\times2-3}{2+1}=\dfrac{1}{3}$，$f(9)=\dfrac{2\times9-3}{9+1}=\dfrac{3}{2}$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[2,9]$ 上的值域为 $[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}]$.

题型二　函数单调性的应用

角度一：利用函数的单调性求最值

【例 14】（1）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1\\ -x^2+2, & x<1\end{cases}$ 的最大值为 ________.

（2）已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{1}{a}(1-x)(a>0)$ 且在 $[0,1]$ 上的最小值为 $g(a)$，求 $g(a)$ 的最大值.

【答案】（1）2；（2）$g(a)$ 的最大值为 1.

【解析】(1) 当 $x\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为减函数，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，为 $f(1)=1$；当 $x<1$ 时，易知函数 $f(x)=-x^2+2$ 在 $x=0$ 处取得最大值，$f(0)=2$. 故函数 $f(x)$ 的最大值为 2.

(2) $f(x)=ax+\dfrac{1}{a}(1-x)$，当 $a>1$ 时，$a-\dfrac{1}{a}>0$，此时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数，$g(a)=f(0)=\dfrac{1}{a}$

当 $0<a<1$ 时，$a-\dfrac{1}{a}<0$，此时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为减函数，$g(a)=f(1)=a$；

当 $a=1$ 时，$f(x)=1$，此时 $g(a)=1$.

$\therefore g(a)=\begin{cases} a, & 0<a<1 \\ \dfrac{1}{a}, & a\geqslant 1 \end{cases}$，$g(a)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，在 $[1,+\infty)$ 上为减函数，又 $a=1$ 时，有 $a=\dfrac{1}{a}=1$.

$\therefore$ 当 $a=1$ 时，$g(a)$ 取最大值 1.

角度二：利用函数的单调性求解不等式

【例 15】 已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上是减函数，且 $f(2a-1)<f(1-a)$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$　　C. $(0,2)$　　D. $(0,+\infty)$

【答案】B

【解析】因为函数 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上是减函数，且 $f(2a-1)<f(1-a)$，

所以 $\begin{cases} 2a-1>1-a \\ -1<2a-1<1 \\ -1<1-a<1 \end{cases}$，解得 $\dfrac{2}{3}<a<1$，

所以实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$. 故选 B.

角度三：利用函数的单调性求参数

【例 16】(1) 如果函数 $f(x)=ax^2+2x-3$ 在区间 $(-\infty,4)$ 上是单调递增的，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $(-\dfrac{1}{4},+\infty)$　　B. $(\dfrac{1}{4},+\infty)$　　C. $(-\dfrac{1}{4},0]$　　D. $[-\dfrac{1}{4},0]$

【答案】D

【解析】当 $a=0$ 时，$f(x)=2x-3$ 在定义域 **R** 上是单调递增的，故在 $(-\infty,4)$ 上单调递增；

当 $a\neq 0$ 时，二次函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{1}{a}$，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,4)$ 上单调递增，

所以 $a<0$，且 $-\dfrac{1}{a}\geqslant 4$，解得 $-\dfrac{1}{4}\leqslant a<0$. 综上所述得 $-\dfrac{1}{4}\leqslant a\leqslant 0$.

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases} (3a-1)x+4a, & x<1 \\ -x+1, & x\geqslant 1 \end{cases}$ 是定义在 **R** 上的减函数，那么 a 的取值范围是________.

【答案】$[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3})$

【解析】要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数（图 1-1-1），必须同时满足 3 个条件：

① $g(x)=(3a-1)x+4a$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数;

② $h(x)=-x+1$ 在 $[1,+\infty)$ 上为减函数;

③ $g(1)\geqslant h(1)$.

$\therefore\begin{cases}(3a-1)<0\\(3a-1)\times1+4a\geqslant-1+1\end{cases}\therefore a\in[\frac{1}{7},\frac{1}{3})$.

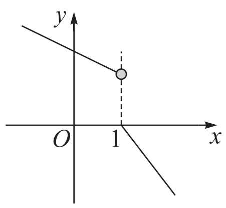


图 1-1-1

题型三　抽象函数单调性和最值

【例 17】 已知函数 $f(x)$ 在实数集中满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f(x)$ 在定义域内是减函数 .

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 若 $f(2a-3)<0$，试确定 a 的取值范围 .

【解析】(1) $\because f(xy)=f(x)+f(y)$，令 $x=y=1$，得: $f(1)=f(1)+f(1)$，$\therefore f(1)=0$.

(2) $f(2a-3)<0$，即 $f(2a-3)<f(1)$. $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，$\therefore 2a-3>1$，得 $a>2$.

即 a 的取值范围为 $(2,+\infty)$.

2. 函数的奇偶性

提分秘籍

(1) 判断函数的奇偶性，其中包括两个必备条件:

① 定义域关于原点对称，这是函数具有奇偶性的必要不充分条件，所以首先考虑定义域 .

② 判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 是否具有等量关系 .

在判断奇偶性的运算中，可以转化为判断奇偶性的等价关系式 $f(-x)+f(x)=0$（奇函数）或 $f(-x)-f(x)=0$（偶函数）是否成立 .

(2) 判断函数奇偶性的方法:

① 定义法: 利用奇、偶函数的定义或定义的等价形式: $\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm1$ $(f(x)\neq0)$ 判断函数的奇偶性 .

② 图象法: 利用函数图象的对称性判断函数的奇偶性 .

③ 验证法: 判断 $f(-x)\pm f(x)$ 是否为 0.

④ 性质法: 设 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域分别是 D_1，D_2，那么在它们的公共定义域上，有下面结论:

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x)g(x)$	$f(g(x))$
偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数
偶函数	奇函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	偶函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	奇函数	奇函数	奇函数	偶函数	奇函数

题型一　函数的奇偶性的判断

【例 18】 已知函数 $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $f(x)$(　　) .

A. 是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 是单调递增　　B. 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 是单调递增

C. 是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 是单调递减　　D. 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 是单调递减

【答案】B

【解析】因为$f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$定义域为**R**，且$f(-x)=3^{-x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x-3^x=-f(x)$，

所以$f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$为奇函数．又$y=3^x$与$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$在定义域上单调递增，所以$f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$在**R**上单调递增．故选B.

【例19】 设函数$f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$，则$f(x)$(　　)．

A. 是奇函数，且在$(0,+\infty)$单调递增　　B. 是奇函数，且在$(0,+\infty)$单调递减

C. 是偶函数，且在$(0,+\infty)$单调递增　　D. 是偶函数，且在$(0,+\infty)$单调递减

【答案】A

【解析】$f(-x)=(-x)^3-\frac{1}{(-x)^3}=-x^3+\frac{1}{x^3}=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数且在$(0,+\infty)$为增函数．

题型二　抽象函数的奇偶性判断

【例20】 若对一切实数x，y，都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(1)求$f(0)$；

(2)判断$f(x)$的奇偶性，并证明你的结论；

(3)若$f(1)=3$，求$f(-3)$.

【答案】(1) 0；(2)奇函数，证明见解析；(3) -9.

【解析】(1)由于对一切实数x，y，都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，

令$x=y=0$，可得$f(0+0)=f(0)+f(0)$，即$f(0)=2f(0)$，解得$f(0)=0$.

(2)函数$f(x)$是奇函数．

证明如下：由题意，函数$f(x)$的定义域为**R**关于原点对称，

令$y=-x$，可得$f(x-x)=f(x)+f(-x)$，即$f(0)=f(x)+f(-x)$，

由(1)知$f(0)=0$，所以$f(-x)=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数．

(3)令$x=y=1$，可得$f(2)=2f(1)$，

因为$f(1)=3$，所以$f(2)=6$，则$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=9$，

因为$f(x)$为奇函数，所以$f(-3)=-f(3)=-9$.

题型三　已知函数奇偶性求参数

【例21】 已知$f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$为奇函数，则$a=$________.

【答案】$a=\frac{1}{2}$

【解析】方法一：因为$f(x)$为奇函数，所以$f(0)=0$，所以$f(0)=a-\frac{1}{2^0+1}=0$，解得$a=\frac{1}{2}$.

方法二(特殊值法)：因为$f(x)$为奇函数，所以$f(-1)=-f(1)$，所以$a-\frac{1}{2^{-1}+1}=-\left(a-\frac{1}{2^1+1}\right)$，解得$a=\frac{1}{2}$.

方法三（定义法）：因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $a-\frac{1}{2^{-x}+1}=-\left(a-\frac{1}{2^{x}+1}\right)$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

【例 22】 已知 $f(x)=\frac{x^2+1}{(3x+2)(x-a)}$ 为偶函数，则 $a=$________.

【答案】$a=\frac{2}{3}$

【解析】方法一（特殊值法）：因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-1)=f(1)$，所以 $\frac{1+1}{[3\times(-1)+2](-1-a)}=\frac{1+1}{(3+2)(1-a)}$，解得 $a=\frac{2}{3}$.

方法二（定义法）：因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，所以 $\frac{(-x)^2+1}{(-3x+2)(-x-a)}=\frac{x^2+1}{(3x+2)(x-a)}$，解得 $a=\frac{2}{3}$.

题型四　利用奇偶性求函数值

【例 23】 已知 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+x$，则 $f(-1)=$________.

【答案】-2

【解析】因 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)=-2$.

【例 24】 已知函数 $y=f(x)+x$ 是偶函数，且 $f(2)=1$，则 $f(-2)=$________.

【答案】5

【解析】设 $F(x)=f(x)+x$，因为 $F(x)$ 为偶函数，所以 $F(-x)=F(x)$，即 $f(-2)-2=f(2)+2$，所以 $f(-2)=5$.

【例 25】 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是定义域上的奇函数与偶函数，且 $f(x)+g(x)=x^2-\frac{1}{x+1}-2$，则 $f(2)=$（　　）.

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. -3　　D. $\frac{11}{3}$

【答案】A

【解析】令 $x=2$，则 $f(2)+g(2)=4-\frac{1}{3}-2=\frac{5}{3}$ ①，令 $x=-2$，则 $f(-2)+g(-2)=4-\frac{1}{-2+1}-2=3$；

因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是定义域上的奇函数与偶函数，所以 $-f(2)+g(2)=3$ ②，由①②解得 $f(2)=-\frac{2}{3}$.

题型五　利用奇偶性求函数解析式

【例 26】 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$，若当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x)$，则当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=$________.

【答案】$f(x)=-\frac{1}{2}x(x+1)$

【解析】设 $-1\leqslant x\leqslant 0$，则 $0\leqslant x+1\leqslant 1$，所以 $f(x+1)=(x+1)(1-(x+1))=-x(x+1)$.

又因 $f(x+1)=2f(x)$，所以 $2f(x)=-x(x+1)$，所以 $f(x)=-\frac{1}{2}x(x+1)$.

【例 27】 已知函数 $y=f(x)$ 在 **R** 是奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析

式为 ________.

【答案】$f(x)=-x^2-2x$

【解析】设 $x<0$，则 $-x>0$，所以 $f(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$，
又因 $f(x)$ 是定义域上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $-f(x)=x^2+2x$，
所以 $f(x)=-x^2-2x$.

题型六　$f(x)=$ 奇函数 + 常数模型（$f(-x)+f(x)=2\times$ 常数）

【例 28】 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$ 且 $f(-2)=10$，求 $f(2)$ 的值 ________.

【答案】-26

【解析】设 $g(x)=x^5+ax^3+bx$，则 $g(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=g(x)-8$，所以 $f(-x)=g(-x)-8$，
所以 $f(-x)+f(x)=g(-x)-8+g(x)-8=-16$，所以 $f(-2)+f(2)=-16$，所以 $f(2)=-26$.

【例 29】 已知函数 $f(x)=ax^{2019}+\dfrac{b}{x}+c\sqrt[3]{x}+2$（$a,b,c\in\mathbf{R}$），且 $f(2)=3$，则 $f(-2)=$________.

【答案】1

【解析】设 $g(x)=ax^{2019}+\dfrac{b}{x}+c\sqrt[3]{x}$，则 $g(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=g(x)+2$，所以 $f(-x)=g(-x)+2$，
所以 $f(-x)+f(x)=g(-x)+2+g(x)+2=4$，所以 $f(-2)+f(2)=4$，所以 $f(-2)=1$.

题型七　求函数最大值与最小值之和

【例 30】 已知 $g(x)=5x^5-3x^3-x+1$（$x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$）的最大值为 M，最小值为 m，求 $M+m$ 的值.

【答案】2

【解析】设 $g(x)=5x^5-3x^3-x$，则 $g(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=g(x)+1$，所以 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}+1$，$f(x)_{\min}=g(x)_{\min}+1$，所以 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=g(x)_{\max}+g(x)_{\min}+2=2$（奇函数的最大值与最小值互为相反数），$M+m=2$.

【例 31】 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+x^{2021}}{x^2+1}$（$x\in[-1,1]$）的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$____.

【答案】2

【解析】$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1+x^{2021}}{x^2+1}=1+\dfrac{2x+x^{2021}}{x^2+1}$，设 $g(x)=\dfrac{2x+x^{2021}}{x^2+1}$，则 $g(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=g(x)+1$，所以 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}+1$，$f(x)_{\min}=g(x)_{\min}+1$，所以 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=g(x)_{\max}+g(x)_{\min}+2=2$（奇函数的最大值与最小值互为相反数），$M+m=2$.

3. 函数的对称性和周期性

提分秘籍

（1）函数常见对称性结论

①若函数 $f(x)$ 对于任意的 x 均满足 $f(a+x)=f(b-x)$，则函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{(a+x)+(b-x)}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ 对称.

②若函数 $f(x)$ 对于任意的 x 均满足 $f(a+x)+f(a-x)=2b$，则 $y=f(x)$ 关于点（a,b）对称.

（2）函数常见周期性结论

若函数对于任意的 x 都满足 $f(x+T)=f(x)$，则 T 为 $f(x)$ 的一个周期，且 $f(x\pm nT)=f(x)$.

几个常见周期性结论：

① 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=-f(x)$，则 $T=2m$.

② 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2m$.

③ 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，则 $T=2m$.

④ 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b+x)$，则 $T=|b-a|$.

⑤ 若函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$，$x=b$ 都对称，则 $f(x)$ 为周期函数且 $2|b-a|$ 是它的一个周期.

⑥ 若函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，则 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

⑦ 若函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$，则 $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

⑧ 若函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$，则 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$.

【例 32】 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+2)=-f(x)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=x^2+2x$，则 $f(15)=$（　　）.

A. 3　　B. -3　　C. 255　　D. -255

【答案】B

【解析】根据题意可知 $f(x)$ 是周期函数，根据周期以及奇函数即可求解.

由 $f(x+2)=-f(x)$ 可得，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，故 $f(15)=f(-1)=-f(1)=-3$.

故选 B.

【例 33】 求函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 的图象的最小正周期________.

【解析】由三角函数的周期公式知：$T=\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$.

实战演练

一、选择题

1. 函数 $y=2^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的单调递增区间是（　　）.

A. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $(-\infty,-1]$　　C. $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $[-1,2]$

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+6)=f(-x)$，若当 $x\in[-3, 0]$ 时，$f(x)=6^{-x}$，则 $f(2021)=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 6　　D. 216

二、填空题

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$, $f(1)=3$，则 $f(2023)=$____________.

三、计算题

1. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\log_3(2x+1)$

（2）$y=\sqrt{-x^2-x+6}$

（3）$y=\dfrac{1}{3^x-1}$

（4）$y=\dfrac{\sqrt[3]{4x-8}}{\sqrt{6-5x-x^2}}$

2. 指出下列复合函数的结构.

（1）$y=\sin(2x+1)$

（2）$y=2^{\cos 3x}$

（3）$y=\sqrt[3]{x^2-1}$

（4）$y=\cos\sqrt[3]{2x^2+1}$

3. 求出下列所给函数复合而成的函数.

（1）$y=\sin u$、$u=x^2$

（2）$y=e^u$、$u=\sin t$、$t=2x+1$

（3）$y=\ln u$、$u=v^2$、$v=\cos w$、$w=2x$

（4）$y=\tan u$、$u=v^2$、$v=3x+2$

4. 判断下列函数的单调区间.

（1）$y=x^2-3|x|+2$

（2）$y=|x-1|+\sqrt{(x-2)^2}$

5. 判断下列各函数是否具有奇偶性.

（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$

（2）$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$

（3）$f(x)=(1-x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

6. 求下列函数的周期.

（1）$y=\sin x-\cos x$

（2）$y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$

（3）$y=\cos(\pi x+\dfrac{\pi}{4})+2$

（4）$y=\tan(4x+\dfrac{\pi}{4})+1$

7. 求下列函数的反函数.

（1）$y=\sqrt[3]{x+1}$

（2）$y=\dfrac{3^x}{3^x-1}$

（3）$y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$

（4）$y=\dfrac{1}{3}\ln(x+1)$

答案大揭秘

一、选择题

1.C　2.C

二、填空题

-3

三、计算题

1.（1）$(-\dfrac{1}{2},+\infty)$　（2）$[-3,2]$　（3）$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　（4）$(-6,1)$

2.（1）由 $y=\sin u$，$u=2x+1$ 复合而成

（2）由 $y=2^u$，$u=\cos v$，$v=3x$ 复合而成

（3）由 $y=u^{\frac{1}{3}}$，$u=x^2-1$ 复合而成

（4）由 $y=\cos u$，$u=v^{\frac{1}{3}}$，$v=2x^2+1$ 复合而成

3.（1）$y=\sin x^2$　（2）$y=e^{\sin(2x+1)}$　（3）$y=\ln\cos^2(2x)$　（4）$y=\tan(3x+2)^2$

4.（1）$f(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$上递减，在 $[-\dfrac{3}{2},0]$ 上递增，在 $[0,\dfrac{3}{2}]$ 上递减，在$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$上递增.

（2）$f(x)$在（$-\infty$,1] 上递减，在 [2,$+\infty$）上递增 .

5.（1）奇函数　（2）既是奇函数又为偶函数　（3）非奇非偶函数

6.（1）2π　（2）π　（3）2　（4）$\dfrac{\pi}{4}$

7.（1）$y=x^3-1$　（2）$y=\log_3\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$　（3）$y=\dfrac{x+1}{2(x-1)}$　（4）$y=e^{3x}-1$

1.2 极限

基础沉淀

1.2.1　数列的极限

定义 1.2.1　对于数列 $\{a_n\}$，如果恒有 $a_{n+1}>a_n$，则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，如果恒有 $a_{n+1}<a_n$，则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列 . 如果存在一个常数 $M(M>0)$，使得对于任意的自然数 n，都恒有 $|a_n|\leqslant M$，则称 $\{a_n\}$ 是有界数列 . 如果对任意常数 $M(M>0)$，总存在一个自然数 N，使得有 $|a_N|>M$ 成立，则称 $\{a_n\}$ 是无界数列 .

定义 1.2.2　在 n 无限增大的变化过程中，如果数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_n 无限趋向于某个常数 A，那么称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 换句话说，即：对于数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，把 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

定理 1.2.1（单调有界定理）　单调有界数列必有极限 .

例如数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$（$n$ 为自然数）单调递减，并且$\left|\dfrac{1}{n}\right|\leqslant 1$，因此由单调有界定理可知数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$一定是收敛的 .

定理 1.2.2（夹逼定理）　对于数列 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$，如果满足 $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

例 1.2.1　利用极限存在准则证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

证：
$$\because\ \frac{n^2}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1,$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

1.2.2 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

当自变量 x 无限接近 x_0 时，记为：$x\to x_0$；当自变量 x 从 x_0 的左侧（即小于 x_0 的一侧）无限接近 x_0 时，记为：$x\to x_0^-$；当自变量 x 从 x_0 的右侧（即大于 x_0 的一侧）无限接近 x_0 时，记为：$x\to x_0^+$.

下面我们给出当 $x\to x_0$、$x\to x_0^-$、$x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义 .

定义 1.2.3 如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于常数 a，则称 a 为当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 的左极限 . 记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a\,(x\to x_0^-).$$

定义 1.2.4 如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于常数 a，则称 a 为当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 的右极限 . 记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a\,(x\to x_0^+).$$

函数 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 统称为单侧极限 .

定义 1.2.5 如果当 $x\to x_0$ 时（$x\to x_0^-$ 且 $x\to x_0^+$），函数 $f(x)$ 的值无限接近于常数 a，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 以 a 为极限 . 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a\,(x\to x_0)\ .$$

注意：当 $x\to x_0$（$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 的值无限呈现无限增大（无限减小）的趋势时，这时极限不存在，为了叙述方便，我们也称函数 $f(x)$ 以正无穷大（负无穷大）为极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$（$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$），有时根据需要也会直接记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

定理 1.2.3 函数 $f(x)$ 在 x_0 点极限存在的充要条件是：$f(x)$ 在 x_0 的左右极限都存在且相等 .

即
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=a.$$

例 1.2.2 已知 $f(x)=\begin{cases}2x-4, & x<1\\ 0, & x=1\\ x^2+2x-3, & x>1\end{cases}$，函数 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，并判断 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，如果 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在请求出，如果不存在，也请说明理由 .

解：

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x-4=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+2x-3)=0$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) \text{ 不存在}$$

例 1.2.3 已知 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<0\\ 4, & x=0\\ x^2+2x+1, & x>0\end{cases}$，求函数 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，并判断 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在，如果 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在请求出，如果不存在，也请说明理由 .

解：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(3x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+2x+1)=1$$

$$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$
$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

通过以上例题可以看出，函数$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否存在，只与它的左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在并且相等与否有关，与其$f(x_0)$是否存在无关.

1.2.3　当 $x\to\infty$ 时函数的极限

当自变量$|x|$无限变大时，读作x趋于无穷大，记为：$x\to\infty$；当自变量x沿着x负半轴方向无限变小时，读作x趋于负无穷大，记为：$x\to-\infty$；当自变量x沿着x正半轴方向无限增大时，读作x趋于正无穷大，记为：$x\to+\infty$.

定义 1.2.6　如果当$x\to-\infty$时，函数$f(x)$的值无限接近于常数a，则称当$x\to-\infty$时，$f(x)$以a为极限.记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a(x\to-\infty).$$

定义 1.2.7　如果当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$的值无限接近于常数a，则称当$x\to+\infty$时，$f(x)$以a为极限.记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a(x\to+\infty).$$

定义 1.2.8　如果当$x\to\infty$时（$x\to-\infty$且$x\to+\infty$），函数$f(x)$的值无限接近于常数a，则称当$x\to\infty$时，$f(x)$以a为极限.记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a(x\to\infty).$$

定理 1.2.4　函数$f(x)$在$x\to\infty$时极限存在的充要条件是：$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$都存在且相等，即

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=a.$$

例 1.2.4　求下列函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{3x}\right)$　　（2）$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+3$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan x+\dfrac{1}{3x+2}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^{2x}$

（1）解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{3x}\right)=2$

（2）解：$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+3=3$

（3）解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan x+\dfrac{1}{3x+2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

（4）解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^{2x}=0$

例 1.2.5　请判断$x\to\infty$时，函数$f(x)=\arctan x$的极限是否存在？

解：

$$\because \lim_{n\to-\infty} \arctan x=-\pi$$
$$\lim_{n\to+\infty} \arctan x=\pi$$
$$\therefore \lim_{n\to-\infty} \arctan x\neq\lim_{n\to+\infty} \arctan x \quad \therefore \lim_{n\to\infty} \arctan x \text{ 不存在}.$$

考点突破

考点一　数列的极限

提分秘籍

1. “$\infty-\infty$”型的数列极限，通常是经过通分转化成分式的形式再求解 .

2. “$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的数列极限，通常采用“抓大头”的方法求解 .

（1）$\dfrac{\infty}{\infty}$型且分子分母都以多项式给出的极限，一般分子分母同除 x 的最高次方；

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0}{b_mn^m+b_{m-1}n^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & (m>k)\\ \infty & (m<k)\\ \dfrac{a_k}{b_m} & (m=k)\end{cases}\ (a_k\neq 0,\ b_m\neq 0)$$

（3）以上方法总结起来就是“抓大头”，首先找到分子、分母中占主要的部分，俗称“大头”，然后分子分母同时除以“大头”.

3. 利用夹逼定理也是求解数列极限常用手段 .

【例 1】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$.

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}\right)=0.$

【例 2】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+3^n}{4^{n+1}+3^{n+1}}$.

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+3^n}{4^{n+1}+3^{n+1}}=\dfrac{1+(\frac{3}{4})^n}{4+3(\frac{3}{4})^n}=\dfrac{1}{4}.$

【例 3】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right).$

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

【例 4】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n-1}+\dfrac{1}{n^2+n-2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n-n}\right).$

【解析】 $\dfrac{n}{n^2+n-1}\leqslant\dfrac{1}{n^2+n-1}+\dfrac{1}{n^2+n-2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n-n}\leqslant\dfrac{n}{n^2+n-n}$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+n-1}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+n-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

所以由夹逼定理可知：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n-1}+\dfrac{1}{n^2+n-2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n-n}\right)=0.$

考点二　函数的极限

题型一　约去零因子求极限

提分秘籍

找到零因子，然后约掉零因子，排除干扰，露出庐山真面目，迅速求答案 .

【例 5】 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$.

【说明】$x\to1$ 表明 x 与 1 无限接近，但 $x\neq1$，所以 $x-1$ 这一非零因子可以约去 .

【解析】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)(x^2+1)=4.$

题型二　分子分母同除 x 的最高次方求极限（“抓大头”）

提分秘籍

（1）$\dfrac{\infty}{\infty}$型且分子分母都以多项式给出的极限，一般分子分母同除 x 的最高次方；

（2）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & (m>n)\\ \infty & (m<n)\\ \dfrac{a_n}{b_n} & (m=n)\end{cases}\quad(a_n\neq0,\ b_m\neq0)$$

（3）以上方法总结起来就是“抓大头”，首先找到分子、分母中占主要的部分，俗称“大头”，然后分子分母同时除以“大头”.

【例 6】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{3x^3+1}$.

【说明】$\dfrac{\infty}{\infty}$型且分子分母都以多项式给出的极限，可通过分子分母同除 x 的最高次项来求解 .

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{3}$

【例 7】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{4x^4+1}$.

【说明】$\dfrac{\infty}{\infty}$型且分子分母都以多项式给出的极限，可通过分子分母同除 x 的最高次项来求 .

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{4x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{1}{x^4}}=0$

题型三　分子（母）有理化求极限

提分秘籍

1. 针对难以直接求解的极限，恰好题目中又含有根号的极限求解问题，采用有理化往往能够解决问题．

2. $\lim[f(x)-g(x)]$ 为“$\infty-\infty$”型，一般是先通分或有理化后再求解．

3. $\lim[f(x)\cdot g(x)]$ 为“$0\cdot\infty$”型，一般是先转化为“$\frac{\infty}{\infty}$”再求解．

【例 8】 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$．

【说明】分子或分母有理化求极限，是通过有理化化去无理式．

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}\right)=0$

题型四　应用两个重要极限求极限

提分秘籍

1. 两个重要极限中的第一个重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$过于简单且大多数时间，推荐使用等价无穷小来实现．

2. 第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

（1）首先认准是否是“1^∞”型的极限．

（2）构造出“$\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$”的基本形式，如果没有出现“1”，则可以通过配凑来实现．例如 $\lim r^{\frac{1}{r+1}}=\lim[1+(r-1)]^{\frac{1}{r+1}}=\mathrm{e}$.

【例 9】 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2$

【例 10】 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}=1$

题型五　用等价无穷小量代换求极限

提分秘籍

（1）常见等价无穷小有：

当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$，

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$(1+ax)^b-1\sim abx$.

（2）等价无穷小量代换，只能代换极限式中的因式 .

（3）此方法在各种求 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法中应作为首选 .

【例 11】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\ln(x+1)}{1-\cos x}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\ln(x+1)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$

【例 12】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})}{x^3}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{4}$

题型六　用对数恒等式求 $\lim f(x)^{g(x)}$ 极限

【例 13】 求极限$\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{3}{x}}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{3}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3\ln[1+\ln(1+x)]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3\ln(1+x)}{x}}=e^3$

【注】对于 1^∞型未定式 $\lim f(x)^{g(x)}$ 的极限，也可用公式

1^∞：

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim(f(x)-1)g(x)},$$

因为

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln(f(x))}=e^{\lim g(x)\ln(1+f(x)-1)}=e^{\lim(f(x)-1)g(x)}.$$

实战演练

一、选择题

1.（2015 年成人高等学校招生全国统一考试专升本）设 $b\neq0$，当 $x\to0$ 时，$\sin bx$ 是 x^2 的（　　）.

A. 高阶无穷小量　　B. 等价无穷小量

C. 同阶但不等价无穷小量　　D. 低阶无穷小量

2.（2012 年河南省普通高等学校选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试）当 $x\to0$ 时，下列无穷小量中与 $\ln(1+2x)$ 等价的是（　　）.

A. x　　B. $\frac{1}{2}x$　　C. x^2　　D. $2x$

3.(2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本)设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}=2$，则 $b=$(　　).

A. 2　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. -2

4.(2012 年四川理工学院专升本《高等数学》考试题)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$(　　).

A. 1　　B. 3　　C. 2　　D. ∞

5.(2013 年四川理工学院专升本《高等数学》考试题)当 $x\to0$ 时，$\dfrac{1}{4}(\cos 3x-\cos x)$为 x^2 的(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但不是等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

二、填空题

1.(2016 年四川理工学院专升本《高等数学》考试题)已知极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-x+1})$存在，则 $a=$________.

2.(2017 年四川理工学院专升本《高等数学》考试题)若$f(x)=\ln(1+x^2)$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3)-f(3-h)}{h}=$________.

3.(2019 年统招专升本四川理工大学高等数学考试题)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+6}\right)^{-2x}=$________.

4.(2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3n^2+5n}{2n^2+4n+5}=$________.

5.(2022 年成人高等学校招生全国统一考试专升本)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin2x}{\sin x}=$________.

三、计算题

1.(2016 年四川理工学院专升本《高等数学》考试题)求极限$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-\cos\pi x}{x^2-4x+4}$.

2.(2016 年四川理工学院专升本《高等数学》考试题)求极限$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\cot x}$.

3.(2012 年河南省普通高等学校选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试)求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{e^{x^3}-1}$.

答案大揭秘

一、选择题

1.D　2.D　3.A　4.A　5.B

二、填空题

1. 9　2. $\dfrac{3}{5}$　3. e^6　4. $\dfrac{3}{2}$　4. 3

三、计算题

1. $\dfrac{\pi^2}{2}$　2. e^3　3. $\dfrac{1}{2}$

1.3 函数的连续性

基础沉淀

1.3.1　连续函数的概念

定义 1.3.1　设变量 u 从它的一个初值 u_0 变化到终值 u_1，那么我们称终值与初值的差 u_1-u_0 为变量 u 在 u_0 处的增量，记为 Δu，即 $\Delta u=u_1-u_0$.

设函数 $y=f(x)$在 x_0 处某一个邻域内有定义，当自变量 x 在这个邻域内从 x_0 变化到 x_1 时，自变量的增量为 $\Delta x=x_1-x_0$，函数 $y=f(x)$相应地从 $f(x_0)$变化到 $f(x_1)$，称 $f(x_1)-f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$对应于 Δx 的增量，记为 Δy，即：

$$\Delta y=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

我们借下面图形（图 1-3-1）来帮助理解：

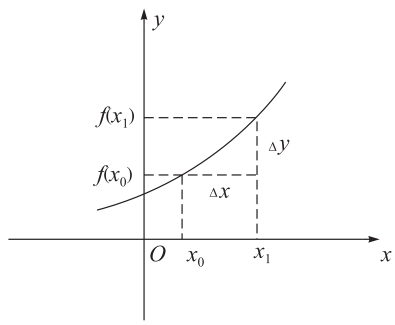


图 1-3-1

从上面图形可以看出，如果函数 $y=f(x)$在 x_0 处连续，则当 $\Delta x\to 0$（即 $x\to x_0$）时，总有 $\Delta y\to 0$，对此我们有如下定义：

定义 1.3.2　设函数 $y=f(x)$在 x_0 的邻域内有定义，如果对应于在 x_0 邻域内的增量 $\Delta x\to 0$ 时，相应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋近于零，即：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

那么，称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

由定义知道当 $\Delta x\to 0$ 时，若设 $x=x_0+\Delta x$，则有 $x\to x_0$，又由于 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$，于是有：$f(x)=f(x_0)+\Delta y$，则 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$.

可知：$\Delta y\to 0$，即 $f(x)\to f(x_0)$，若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 连续，则有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

如果函数在 x_0 连续，那么函数一定满足以下条件：

（1）函数 $y=f(x)$在 x_0 有定义；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在（即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$）；

（3）函数在 x_0 的极限值等于 x_0 的函数值（即 $f(x)=a$）.

1.3.2　函数的间断点

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不满足连续的条件，那么我们称函数 $y=f(x)$在点 x_0 是间断的，点 x_0 称为 $y=f(x)$的间断点，即有以下情形之一的点 x_0 均为间断点：

（1）函数 $y=f(x)$在 x_0 没有定义；

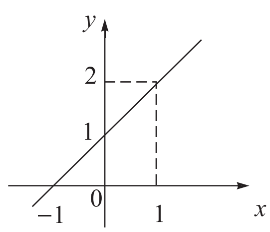
（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

一般地，间断点分为两类:（1）如果是左右两个极限都存在的间断点，这类型的间断点为第一类间断点 . 第一类间断点又分成两种情况，如果左右极限存在且相等的间断点，我们称为可去间断点；如果是左右极限都存在但是不相等的间断点（$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$），称为跳跃间断点 .（2）左、右极限至多存在一个的间断点的称为第二类间断点，常见的有以无穷大为极限的间断点称为无穷间断点，另外一种情形函数图象始终是波动的，这样的间断点称为振荡间断点，除此以外还有其他情形的第二类间断点，就不一一列举 .

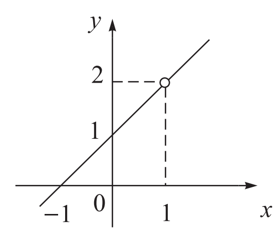
下面来观察下述几个函数的曲线图（图 1-3-2），在 $x=1$ 处的情况，并指出间断点的类型 .

① $y=x+1$



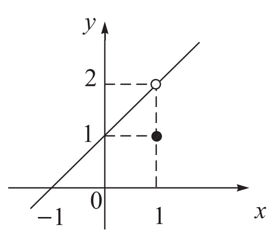
在 $x=1$ 处连续.

② $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$



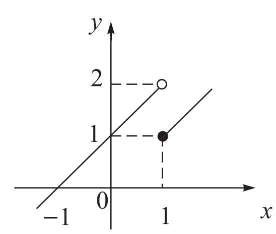
在 $x=1$ 处间断，为可去间断点

③ $y=\begin{cases} x+1 & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$



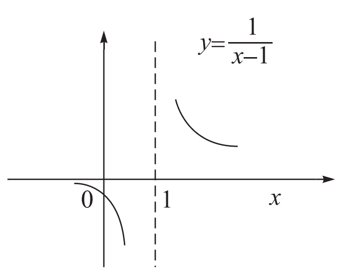
在 $x=1$ 处间断，为可去间断点

④ $y=\begin{cases} x+1 & x\neq 0 \\ x & x\geqslant 0 \end{cases}$



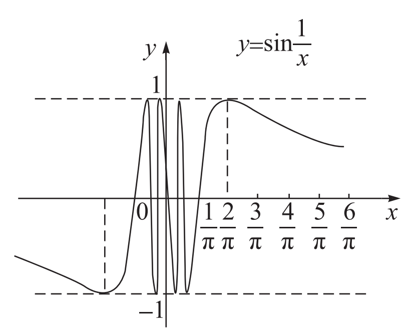
在 $x=1$ 处间断，为跳跃间断点

⑤ $y=\dfrac{1}{x-1}$



在 $x=1$ 处间断，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，为无穷间断点

⑥ $y=\sin\dfrac{1}{x}$



在 $x=0$ 处间断，为振荡间断点

图 1-3-2

像②③④这样在 x_0 点左右极限都存在的间断，称为第一类间断点，其中②③称作第一类间断的可去间断点，此时只要令 $f(1)=2$，则在 $x=1$ 函数就变成连续的了；④被称作第一类间断点中的跳跃间断点. ⑤⑥被称作第二类间断点，其中⑤称作无穷间断点，而⑥称作振荡间断点.

例 1.3.1　求下列函数间断点并判断属于哪种类型间断点.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geqslant 0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$　　(3) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$　　(5) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & x<0 \end{cases}$

(1) 解：因为函数 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 在 $x=3$ 点没有定义，故此函数在 $x=3$ 处不连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}x+3=6$，所以，$x=3$ 是第一类间断点中的可去间断点.

(2) 解：因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$ 且 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$，所以，$x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(3) 解：因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0\neq f(0)=2$，所以，$x=0$ 是第一类间断点中的可去间断点.

(4) 解：因为 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$，所以，$x=2$ 是第二类间断点中的无穷间断点.

(5) 解：因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，所以，$x=0$ 是第二类间断点中的无穷间断点.

1.3.3　函数连续的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续指的是 $y=f(x)$ 的图象在 x_0 是不断开的，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 处连续指的是 $y=f(x)$ 的图象在 (a,b) 内是连续不断的. 由于初等函数的图象在其定义域内都是连绵不断的曲线，因此，初等函数在其定义域区间内都是连续的.

定义 1.3.3　若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都是连续的，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在，则称 $f(x)$ 为开区间 (a,b) 内的连续函数，或称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是连续的.

如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续且 $f(x)$ 在左端点 $x=a$ 处右连续（$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$）；在右端点 $x=b$ 处左连续（$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$），则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 相应地，区间 $[a,b]$ 称为函数 $f(x)$ 的连续区间.

例 1.3.2　设 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1<x<2 \end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左、右极限，函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处是否有极限?

(2) 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处是否连续?

(3) 确定函数 $f(x)$ 的连续区间.

分析：对于函数 $f(x)$ 在给定点 x_0 处的连续性，关键是判断函数当 $x\to x_0$ 时的极限是否等于 $f(x_0)$；函数在某一区间上任一点处都连续，则函数在该区间上连续.

解：(1) $\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}1=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=1$，即函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处有极限.

(2) $\because f(1)=\dfrac{1}{2}\neq\lim\limits_{x\to1}f(x)$ $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续.

(3) 函数 $f(x)$ 的连续区间是 $(0,1)$，$(1,2)$.

例 1.3.3 确定 a，b 使 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ a & x=0\\ x+b & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$；

又因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+b)=b$，$f(0)=a$

所以，当 $a=b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

1.3.4 连续函数的性质

(1) 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处都连续，那么 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 处也连续，如果 $g(x_0)\neq0$，那么 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处也连续.

(2) 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，而 $y=f(u)$ 在 $u_0(u_0=\varphi(x_0))$ 处也连续，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x_0 处连续. 并且有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$.

(3) 初等函数在其定义域内连续.

定理 1.3.1（最大值和最小值定理） 如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，那么存在 ξ、$\eta\in[a,b]$ 使得对于任意 $x\in[a,b]$ 有不等式

$$f(\xi)\leqslant f(x)\leqslant f(\eta).$$

其中 $m=f(\xi)$ 为最小值，$M=f(\eta)$ 为最大值.

注意：如果定理中的条件不满足，结论就不一定成立.

例如函数 $y=\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内连续，既没有最大值也没有最小值但在开区间内连续的函数也可以取得最大值与最小值，例如函数 $y=\sin x$ 在 $(0,2\pi)$ 内连续，它在该区间内有最大值 $f(\frac{\pi}{2})=1$ 与最小值 $f(\frac{3\pi}{2})=-1$. 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & 0\leqslant x<1\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上有间断点 $x=0$，它在 $[-1,1]$ 上没有最大值与最小值.

定理 1.3.2（零点定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间 (a, b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

定理 1.3.3（介值定理） 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，其最大值是 M，最小值是 m，那么在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$m\leqslant f(\xi)\leqslant M.$$

从图 1-3-3 可以直观观察零点定理的几何意义，从图 1-3-4 可以直接观察介值定理的几何意义.

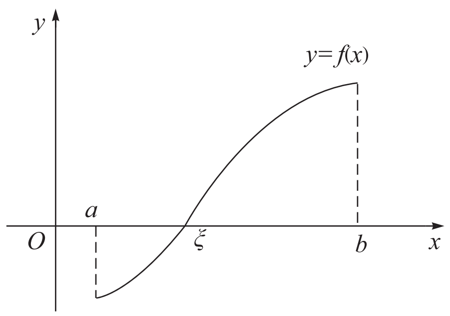


图 1-3-3

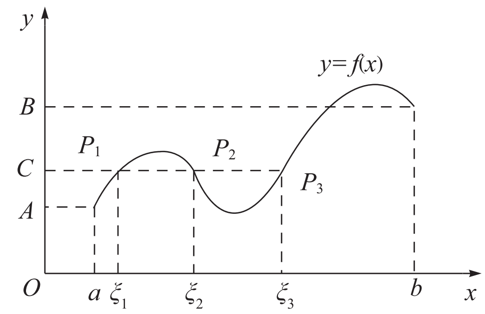


图 1-3-4

例 1.3.4　证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在（1,2）内至少有一个实根 .

证明：设 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 在 [1,2] 上连续，且 $f(1)\cdot f(2)=-3\times25<0$．由零点定理知，在（1,2）内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，即 ξ 是方程 $x^5-3x-1=0$ 在（1,2）内的一个根 .

例 1.3.5　设 $f(x)$ 在闭区间 [0,1] 上连续且 $0\leqslant f(x)\leqslant1$，证明至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证明：令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在闭区间 [0,1] 连续且

$$F(0)=f(0)-0\geqslant0,\ F(1)=f(1)-1\leqslant0.$$

根据零点定理：至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

考点突破

考点一　函数的连续性

提分秘籍

1. 判断函数在 x_0 处连续的三个条件：

（1）函数 $y=f(x)$ 在 x_0 有定义；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$）；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2. 讨论分段函数在分界点处的极限时，需要分别求出 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，然后根据极限存在的充要条件判断函数在 x_0 处连续性 .

3. 初等函数在其定义域内是连续的 .

【例 1】 函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}+\ln(x+2)$ 的连续区间________.

【解析】该函数是初等函数，在有定义的区间上是连续的，它的定义域为 $(-2,0)\cup(0,+\infty)$，所以它的连续区间也为 $(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

【例 2】 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+2 & x<0\\ x^2+x+a & x\geqslant0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

【解析】函数 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x+2=3$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^2+x+a=a$，由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则 $a=3$.

【例 3】 求极限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2}{2x-3}$.

【解析】由于 $x=2$ 在 $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2x-3}$ 的定义域区间内，所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{2x-3}=\dfrac{2^2-2}{4-3}=2$.

考点二　函数的间断点

提分秘籍

判断函数在 $x=x_0$ 处间断点及其类型的一般步骤：

第一步：首先判断函数 $f(x)$ 在 x_0 是否定义，如果无定义，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 是间断的；如果有定义，进入下一步判断.

第二步：判断 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 是否存在，分以下三种情形：

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 两个都存在：

① $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 不相等，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为第一类间断点中的跳跃间断点；

② $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 相等，再判断 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否等于 $f(x_0)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为第一类间断点中的可去断点；如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 是连续的.

（2）如果至少有一个不存在，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 是间断的，且为第二类间断点：

① 如果至少有一个极限为无穷大，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为第二类间断点中的无穷间断点；

② 如果函数在 $x=x_0$ 处极限不稳定，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为第二类间断点中的振荡间断点.

【例 4】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 可去间断点　　B. 振荡间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 连续点

【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

考点三　零点定理证明根的存在性

提分秘籍

利用零点定理判断方程根的存在性是闭区间上连续函数的性质的重要运用，也是专升本考试常考的一个考点，通常采用以下步骤：

第一步：构造一个函数 $f(x)$ 使得它在 $[a,b]$ 上连续；

第二步：计算 $f(a)$，$f(b)$，并说明 $f(a)\cdot f(b)<0$；

第三步：根据上述条件，由零点定理可知，$f(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至少存在一个实根.

【例 5】 证明方程 $x^3-3x-1=0$ 至少有一个根介于 0 到 2 之间.

【证明】设函数 $f(x)=x^3-3x-1$，$x\in[0,2]$，显然函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续.

$f(0)=-1$，$f(2)=1$，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in[0,2]$ 使得 $f(\xi)=0$，则方程 $x^3-3x-1=0$ 至

少有一个根介于 0 到 2 之间 .

【例 6】 证明方程 $x^3-5x+1=0$ 至少有一个小于 1 的正根 .

【证明】设函数 $f(x)=x^3-5x+1$，$x\in[0,1]$，显然函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续 .

$f(0)=1>0$，$f(1)=-3<0$，则 $f(0)\cdot f(1)<0$，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=0$，则方程 $x^3-5x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根 .

考点四 介值定理在证明题中的应用

【例 7】 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：存在 $\xi\in[x_1,x_3]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$.

【证明】由函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，设 M，m 分别是函数在区间 $[x_1,x_3]$ 上的最大值与最小值，则 $m\leqslant f(x_1)\leqslant M$，$m\leqslant f(x_2)\leqslant M$，$m\leqslant f(x_3)\leqslant M$，则 $m\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\leqslant M$，由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_3]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$ 成立 .

实战演练

一、选择题

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在该点（　　）.

A. 一定有极限　　B. 不一定有极限　　C. 无极限　　D. 不一定有定义

2. 设函数 $f(x)=\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3.（2011 年四川理工专升本）设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ a+x, & x\leqslant 0 \end{cases}$，要使函数在 $x=0$ 处连续，则（　　）.

A. $a=1$　　B. $a=0$　　C. $a=2$　　D. 以上都不对

4. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内的零点情况是（　　）.

A. 一定有零点　　B. 无零点　　C. 不一定有零点　　D. 以上答案都错

5.（2017 年成人高等学校招生全国统一考试专升本）若函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$（　　）.

A.0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

二、填空题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ 的间断点为 $x=$________.

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=1$，则 $f(1)=$________.

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0,\\ a+bx, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 处处连续，则 $a=$________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $F(x)=f(x)+g(x)$ 的间断点是________.

三、计算题

1. 判断下列函数在指定点处的连续性，若间断，判别间断点的类型 .

（1）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ e^{x}+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处 .

（2）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在点 $x_1=1$，$x_2=2$ 处 .

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 的连续区间、间断点 .

3. 证明：方程 $x^2+2x-1=0$ 在（0,1）上至少有一个实根 .

答案大揭秘

一、选择题

1.A　2.D　3.B　4.C　5.B

二、填空题

1. 2　2. -1　3. 1　4. $\dfrac{1}{2}$　5. $x=1$

三、计算题

1.（1）$x=0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点 .

（2）$x_1=1$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点，属于第一类间断点，$x_2=2$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点，属于第二类间断点 .

2. 连续区间：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$x=0$ 为间断点 .

3. 证明：设 $f(x)=x^2+2x-1$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1$，$f(1)=2$，$f(0)\cdot f(1)<0$，由零点定理知，在（0,1）至少存在一个 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^2+2\xi-1=0$，所以 ξ 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的一个实根 .

综合提升

一、单项选择题

1. 已知 $f(3x-3)$ 的定义域为 $[-1,2]$，则 $f(x)$ 的定义域为（　　）.

A. $\left[\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right]$　　B. $[2,5]$　　C. $[-6,3]$　　D. $[-2,1]$

2. $f(x)$ 的定义域是 $[-2,2]$，则 $f(\log_3 x)$ 的定义域是（　　）.

A. $\left[-\frac{1}{9},0\right)\cup(0,9]$　　B. $\left[-\frac{1}{9},9\right]$　　C. $\left[0,\frac{1}{9}\right)\cup(0,9]$　　D. $\left[\frac{1}{9},9\right]$

3. 下列各项函数中表示同一函数的是（　　）.

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$　　B. $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln|x|$

C. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$　　D. $f(x)=e^{\ln x}$，$g(x)=x$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，下列函数中必为奇函数的是（　　）.

A. $y=-|f(x)|$　　B. $y=f(x)+f(-x)$　　C. $y=-f(-x)$　　D. $y=x^3f(x^4)$

5. 下列选项中是奇函数的是（　　）.

A. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　B. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　C. $x^3-\cos x$　　D. $x^7\sin x$

6. $f(x)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上为任意函数，则下列函数为偶函数的是（　　）.

A. $f(x)-f(-x)$　　B. $[f(x)]^2$　　C. $|f(x)|$　　D. $f(|x|)$

7. 当 $x\to0$ 时，下列选项中为 x 高阶无穷小的是（　　）.

A. $\sin 2x$　　B. $\sqrt{1-x}-1$　　C. $\cos x-1$　　D. $\ln(1+5x)$

8. 当 $x\to0$ 时，$3x^2-\sin 2x^2$ 是 x^2 的（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但非等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

9. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)(x+5)}$ 的连续区间为（　　）.

A. $(-8,0)$　　B. $(-4,-1)$　　C. $(1,4)$

10. 函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)\sin x}{x(x-2)}$ 的可去间断点是（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不确定

二、填空题

1. 函数 $y=\dfrac{1}{\sin x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是________.

2. 已知 $f(x)=x^3$，$g(x)=e^x$，则 $f[g(x)]=$________.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin mx}{2x}=\dfrac{3}{2}$，求 $m=$________.

4. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=32$，则 $a=$________.

5. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8^x}{8^x-5^x}=$________.

6. 已知 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}$，则 $k=$________.

7. 计算极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$________.

8. 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-2e^x-x}{x^2-x}$存在，则 $a=$________.

9. 函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0\\ a+3x, & x\leqslant0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$连续，求 $a=$________.

10. 设$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$，则补充定义$f(0)=$________时，函数$f(x)$在$x=0$处连续.

三、计算题

1. 设$f(\sin^2x)=1+\cos 2x$，求$f(x)$.

2. 计算下列数列极限：($\dfrac{\infty}{\infty}$型)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(2n+1)}{n^3+n+4}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+n+4}$

3. 计算下列函数极限：($\infty-\infty$型)

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2x}\right)$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x)$

4. 计算下列函数极限：($\dfrac{0}{0}$型)

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{\tan x^2}-1)(x+1)}{1-\cos 2x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sin x(\cos x-1)}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\arcsin x)^3}{x(1-\cos x)}$

5. 计算下列极限：(易混型)

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

6. 已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-3x)}{bx} & x<0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{\sin ax}{x} & x>0\end{cases}$，确定常数$a$，$b$的值，使$f(x)$在$x=0$处连续.

7. 讨论函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$的间断点及其类型.

四、证明题

1. 证明方程$x^3-3x-1=0$至少有一个根在 1 与 2 之间.

2. 已知函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<x_3<x_4<b$，试证：必存在$\xi\in[x_1,x_4]$，使得$f(\xi)=$

$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$.

3. 证明方程 $\sin x - x\cos x = 0$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根 .

4. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$a<f(x)<b$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

参考答案

一、单项选择题

1.C 2.D 3.B 4.D 5.B 6.D 7.C 8.D 9.B 10.A

二、填空题

1.$[-1,0)\cup(0,1]$ 2.e^{3x} 3. 1 4. 2 5. 1 6.e^2 7. 1 8. 2 9. 0 10. 1

三、计算题

1. $2-2x$ 2.（1）2 （2）0 （3）$\dfrac{1}{2}$ （4）0 3（1）$\dfrac{\pi}{2}$ （2）$\dfrac{\pi}{6}$ （3）$-\dfrac{1}{3}$ （4）2

4.（1）2 （2）$\dfrac{1}{2}$ （3）$\dfrac{1}{2}$ （4）-1 （5）$\dfrac{1}{2}$ （6）2 5.（1）0 （2）1 （3）0

6. $a=2$，$b=-\dfrac{3}{2}$ 7. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第一类可去间断点，$x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类无穷间断点 .

四、证明题

1.【证明】设 $f(x)=x^3-3x-1$，$x\in[1,2]$，易知 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，

$$f(1)=x^3-3x-1|_{x=1}=-3,\ f(2)=x^3-3x-1|_{x=2}=1,$$

由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=0$，

即在 1 与 2 之间至少有一个根 $x=\xi$.

2.【证明】由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，设 M、m 分别是函数在该区间上的最大、最小值；

则
$$m\leqslant f(x_1)\leqslant M,\ m\leqslant f(x_2)\leqslant M,\ m\leqslant f(x_3)\leqslant M,\ m\leqslant f(x_4)\leqslant M$$

即
$$4m\leqslant f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\leqslant 4M$$

$$m\leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}\leqslant M$$

由介值定理可得，至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_4]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$.

3.【证明】设 $f(x)=\sin x-x\cos x$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$，显然 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续，

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1>0$，$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1<0$ 则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)<0$，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 使得 $f(\xi)=0$，则方程 $\sin x-x\cos x=0$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根 .

4.【证明】设已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$a<f(x)<b$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

设 $F(x)=f(x)-x$，$x\in[a,b]$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(a)=f(a)-a>0$，$F(b)=f(b)-b<0$，则 $F(a)\cdot F(b)<0$，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.