出 版 人　郑豪杰
责任编辑　王玉栋
责任美编　刘玉丽
封面设计　有品堂＿宋永傲

定价：55.00 元
ISBN 978-7-5191-3543-0

初等几何研究

高峥　赵思林　熊露　主编

教育科学出版社
ESPH

初等几何研究

高峥　赵思林　熊露　主编

教育科学出版社
ESPH Educational Science Publishing House

目　　录

第一章

几何学简介

几何学起源于四大文明古国之一的埃及，最早源于对土地进行测量、划分界限的需要．后来埃及人用长分别为三尺、四尺、五尺的绳子作直角三角形，与我国最早的一部数学著作《周髀算经》中提及的勾股定理不谋而合．公元前六七百年，古希腊的哲学、天文学比较繁荣，代表人物泰勒斯首开几何命题论证的先河，并发现和证明了多个几何命题．而几何学的建立以公元前 3 世纪，伟大的古希腊数学家欧几里得创立欧氏几何为标志，其《几何原本》是古希腊数学黄金时代的一座丰碑，首次将零散的几何和数学知识公理化、系统化，形成了一个严密的数学体系．牛顿以此为范本写出了《自然科学的数学原理》，斯宾诺莎以此为范本写出了《伦理学》．之后，从数学严密性角度出发，希尔伯特出版了《平面几何基础》，弥补了平面几何的漏洞．此后，笛卡儿和费马创建了解析几何学，在平面直角坐标系中，将数与形结合起来．此后，非欧几何、球面几何、射影几何、高等几何、分形几何都蓬勃发展起来了．

非欧几何是继欧式几何之后创立的，它的建立可以追溯到对欧几里得第五公设——平行公设的怀疑．在 19 世纪，数学家高斯（德国）、罗巴切夫斯基（俄国）和波尔约（匈牙利）各自独立地发现平行公理独立于其他公理，并发现欧几里得平行公理可以使用不同的“平行公理”来代替，这就标志着非欧几何的建立．罗巴切夫斯基在 1829 年、波尔约在 1832 年分别独立地用平行公理的逆命题，即用“通过直线外一点，可以引不止一条而至少是两条直线平行于已知直线”来代替欧几里得平行公理，作为替代公设，由此替代公设出发进行推导得出了一连串新几何学的定理．罗巴切夫斯基很明确地指出，这些定理之间不会

出现矛盾，这些定理整体形成了一个逻辑上无矛盾的理论体系，这个理论体系就是一种新的几何学——非欧几里得几何学.在这一几何学中，三角形的内角和小于两个直角和.罗巴切夫斯基称这种几何为虚拟几何，后来被称为罗巴切夫斯基几何，简称罗氏几何，也被称为双曲几何.德国著名数学家黎曼也发现了非欧几何，他在1854年发表的题为《关于几何基础的假设》的演讲中，区分了无界和无限这两个概念，称为相容几何学，也称为黎曼的非欧几何（椭圆几何）.这样的几何可以在球面上实现.黎曼的非欧几何出现后，对相对论的发展起到了推动作用.非欧几何的创建，在扩大了几何概念的同时，对20世纪初物理学所发生的关于空间和时间的物理观念的改革等方面也发挥了重大作用.非欧几何的贡献是首次提出了弯曲空间的概念，它为黎曼几何的产生创造了条件.

球面几何是在二维的球面表面上的几何学，也是非欧几何的一个例子.在平面几何中，基本的观念是点和线.在球面上，点的观念和定义依旧不变，但线不再是“直线”，而是两点之间最短的弧线，称为测地线.在球面上，最短线是大圆的弧，所以平面几何中的线在球面几何中被大圆所取代.同样地，在球面几何中的角被定义在两个大圆之间.结果是球面三角学和平常的三角学有诸多不同之处.球面几何学的关键在塑造真实投影平面，通过辨认在球面上获得正相反的对距点（分列在边的两侧相对的点）.球面三角学是球面几何学的一部分，主要处理、发现和解释多边形（特别是三角形）在球面上的角与边的关联.

在经典几何学中，射影几何处于一种特殊的地位，通过它可以把其他一些几何学联系起来.古希腊几何学家为了更好地研究绘图学和建筑学开始研究透视法，也就是投影和截影.早在公元前200年左右，阿波罗尼奥斯就曾把二次曲线作为正圆锥面的截线来研究.在4世纪帕普斯的著作中，出现了帕普斯定理.在17世纪，开普勒最早引进了无穷远点概念，法国数学家笛沙格提出了笛沙格定理，帕斯卡发现了帕斯卡六边形定理.当笛卡儿和费马的解析几何出现时，射影几何才真正成为独立的学科，成为几何学的一个重要分支.19世纪，射影几何最终确立了.平面射影几何的公理体系包括四条接合公理、七条顺序公理和连

续公理，主要研究的是图形的射影性质，即它们经过射影变换后，依然保持原来的图形性质的几何学分支学科．射影几何学也叫做投影几何学．

高等几何对中心投影、仿射不变性、度量不变性、二次曲线的射影性质、射影不变量等内容都进行了分析和研究，包括并融合了欧式几何和解析几何的全部内容．高等几何可以看作是以射影几何为主体的近世几何，是较完善的一门学科．根据数学家克莱因的观点，高等几何以变换群的观点为指导思想，对变换群下图形不变量的性质进行研究，如射影几何对比的变换群是射影群，仿射几何对应的是仿射群，欧式几何对应的是正交群．高等几何能够在相对比较高的层面上对几何空间的特征、研究方法和内在的联系进行认识和研究，从而了解几何学的本质特征．

分形理论是与混沌紧密联系的一门新兴学科，混沌是研究自然界非线性系统内部随机性所具有规律的科学．分形几何作为真正描述大自然的几何学，是现代非线性科学理论的三大研究课题之一，它的思想和方法已经渗透到自然科学的各个领域．1975 年，美籍法裔数学家芒德勃罗用法文出版了第一本分形几何专著《分形对象：形、机遇和维数》，系统地给出了分形几何的内容、思想和方法，这标志着分形几何的诞生．分形几何的创立是几何学史上的又一次革命，它以不规则形态为研究对象，以分形特征为研究主题，把人类对形的认识逐渐由规则形态带到不规则形态．分形和混沌在图像数据压缩编码、国防保密通信、生物信息学、自动控制等方面具有重要的应用前景，属于世界上领先的高新技术基础理论．目前，科学界对分形几何和分形理论的研究和运用已经涉及自然科学和社会科学的几乎所有领域，成为现代学科研究的前沿领域．

初等几何学包括平面几何与立体几何两个部分．平面几何指按照欧几里得的《几何原本》构造的几何学，也称欧几里得几何．平面几何研究的是平面上的直线和二次曲线（即圆锥曲线，包括椭圆、双曲线和抛物线）的几何结构和度量性质（面积、长度、角度、位置关系）．平面几何采用了公理化方法，包括四个重要定理，即由梅涅劳斯证明

的三点共线的定理——梅涅劳斯定理、由塞瓦证明的三线共点或平行的定理——塞瓦定理、由托勒密证明的凸四边形内接于圆，即四点共圆定理——托勒密定理、由西姆松证明的西姆松定理，在数学思想史上具有重要的意义．三维空间的欧几里得几何通常叫做立体几何．立体几何中的基本定理包括射影定理、三垂线定理等．

学习几何学不仅是学习数学几何知识，更重要的是学习几何科学、发现几何科学、研究几何科学、应用几何科学，发展新科技！

第二章

平面几何理论体系

平面几何是初等几何的重要组成部分. 本章着重介绍了平面几何公理体系, 使读者了解公理化方法、平面几何的重要公式、基本定理、重要定理、基本轨迹与几何作图的部分内容. 平面几何公理体系是整个平面几何知识系统的逻辑起点, 由公理体系可以推演出上千条定理(公式), 由此足见演绎推理的巨大威力. 著名数学家华罗庚、姜伯驹等也曾盛赞演绎推理的巨大威力. 姜伯驹院士认为, 数学失去了证明就等于失去了灵魂. 数学中的任何一个分支 (或小的学科) 成熟的标志就是要形成完备的公理体系.

2.1 平面几何公理体系

一、欧几里得公理体系

欧几里得公理体系的 5 个公设和 5 个公理如下.

公设 1 两点可以确定一条直线.

公设 2 直线可以沿其正反两个方向无限延长.

公设 3 在平面内, 所有与某一定点的距离相等的点可构成一个圆.

公设 4 凡直角都相等.

公设 5 同一平面内一条直线和另外两条直线相交, 若在这条直线同侧的两个内角之和小于 180°, 则另外两条直线一定相交.

公理 1 等于同量的量彼此相等.

公理 2 相等的量加某一量, 其和仍相等.

公理 3 相等的量减某一量, 其差仍相等.

公理 4 彼此能够重合的几何图形是全等的.

公理 5 整体大于部分.

二、希尔伯特公理体系

希尔伯特为欧几里得几何建立的完整的、严密的公理体系，包括以下 5 组公理.

公理 Ⅰ 结合公理

(1) 已知两个不同的点，恒有一直线通过此二点.

(2) 已知两个不同的点，至多有一直线通过此二点.

(3) 直线上至少有两点；至少有三点不在同一直线上.

(4) 已知不共线的三个点，恒有一个平面通过它们每一点. 每个平面上至少有一个点.

(5) 已知不共线的三个点，至多有一个平面通过它们每一点.

(6) 如果直线上的两个点在一平面上，那么该直线上的每个点都在此平面上.

(7) 如果二平面有一个公共点，则至少还有另一个公共点.

(8) 至少存在四个点不在一个平面上.

公理 Ⅱ 顺序公理

(1) 如果点 B 在点 A 和点 C 之间，则 A，B，C 是一直线上的三个不同的点，且 B 也在 C，A 之间.

(2) 对于任二点 A，B，直线 AB 上至少有一点 C，使得 B 在 C，A 之间.

(3) 一直线上的三点，至多有一点在其余两点之间.

(4) 设 A，B 和 C 是不共线的三点，直线 a 在平面 ABC 上但不过 A，B 和 C 中的任一点，如果 a 过线段 AB 的一个内点，那么 a 也必过线段 AC 或 BC 的一个内点.

公理 Ⅲ 合同公理

(1) 如果 A，B 是直线 a 上的两点，A'是直线 a'（特别的也可以是 a）上的点，且给定了 a'上 A'的一侧，则在 a'上 A'的这一侧，仅有一点 B'，使得 $A'B' \equiv AB$，因为是线段，并未考虑端点的先后，故 $AB \equiv BA$.

（2）若 $A'B'\equiv AB$，且 $A''B''\equiv AB$，则 $A'B'\equiv A''B''$.

（3）设 AB，BC 是直线 a 上无公共内点的二线段，$A'B'$，$B'C'$是直线 a'上无公共内点的二线段，若 $AB\equiv A'B'$且 $BC\equiv B'C'$，则 $AC\equiv A'C'$.

（4）设给定了平面 α 上的一个角$\angle(h, k)$，又给了平面 α'上的直线 a'，和 α'上 a'的某一侧，如果 h'是 α'上以 O'为端点的射线，那么必有且只有一条以 O'为端点的射线 k'. 使得$\angle(h', k')\equiv\angle(h, k)$.

（5）设 A，B，C 不共线，A'，B'，C'也不共线，如果 $AB\equiv A'B'$，$AC\equiv A'C'$，$\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$，那么，$\angle ABC\equiv\angle A'B'C'$，$\angle ACB\equiv\angle A'C'B'$.

公理Ⅳ　平行（欧几里得）公理

过定直线外的一点，至多有一条直线与该直线平行.

公理Ⅴ　连续公理

（1）阿基米德公理

如果 AB，CD 是任二线段，那么，以 A 为端点的射线 AB 上，必有这样的有限个点 A_1，A_2，…，A_n，使得 $AA_1\equiv A_1A_2\equiv\cdots\equiv A_{n-1}A_n\equiv CD$，且 B 在 A_{n-1}，A_n 之间.

（2）康托公理

一条直线上若有线段的无穷序列 A_1B_1，A_2B_2，…，A_nB_n，…，其中每一线段都位于前一线段的内部，且对任意线段 PQ，总存在一个 n 使得 $A_nB_n<PQ$，那么此直线上有且只有一点 X 落在所有线段 A_1B_1，A_2B_2，…，A_nB_n，…的内部.

2.2　重要公式

2.2.1　三角形重心公式

重心定义　三角形重心是指三角形三边中线的交点.

性质 1　重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2∶1.

性质 2　在平面直角坐标系中，重心的坐标是顶点坐标的算术平均

数，即坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

性质 3　重心到三角形 3 个顶点距离的平方和最小.

证明：设三角形三个顶点分别为（x_1，y_1），（x_2，y_2），（x_3，y_3），平面上任意一点（x_0，y_0），则该点到三顶点距离平方和为：

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_0^2-2x_0(x_1+x_2+x_3)+y_1^2+y_2^2+y_3^2+3y_0^2-2y_0(y_1+y_2+y_3)$$

$$=3\left[x_0-\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\right]^2+3\left[y_0-\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\right]^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+$$

$$y_3^2-\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^2-\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)^2.$$

显然当 $x_0=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$y_0=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$（重心坐标）时，

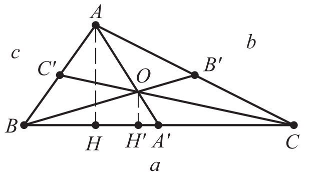
上式取得最小值 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-\dfrac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\dfrac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$.

性质 4　重心和三角形任意两个顶点组成的 3 个三角形面积相等. 即重心到三条边的距离与三条边的长成反比.

在$\triangle ABC$内，三边 a，b，c，点 O 是该三角形的重心，AOA'，BOB'，COC'分别为 a，b，c 边上的中线. 根据重心的性质知：

$OA'=\dfrac{1}{3}AA'$，$OB'=\dfrac{1}{3}BB'$，$OC'=\dfrac{1}{3}CC'$，

如图，过 O，A 分别作 a 边上的高 OH'，AH.



可知 $OH'=\dfrac{1}{3}AH$，则 $S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{2}OH'\cdot a=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}AH\cdot a=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

同理可证 $S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

所以 $S_{\triangle BOC}=S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AOB}$.

性质 5　以重心为起点，以三角形三顶点为终点的三条向量之和等于零向量. 也可表示为：在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，则 M 点为 $\triangle ABC$ 的重心. 反之也成立.

性质 6　设 $\triangle ABC$ 的重心为 G 点，所在平面有一点 O，则 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

性质 7（卡诺重心定理）　若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点，则 $PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3PG^2$.

证明： $GA^2+PG^2=PA^2+2GA\cdot PG\cos\angle AGP$,

$GB^2+PG^2=PB^2+2GB\cdot PG\cos\angle BGP$,

$GC^2+PG^2=PC^2+2GC\cdot PG\cos\angle CGP$,

$GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2$

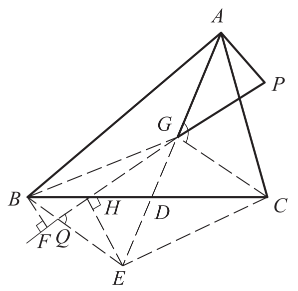
$=PA^2+PB^2+PC^2+2PG\cdot(GB\cdot\cos\angle BGP+GC\cdot\cos\angle CGP+GA\cdot\cos\angle AGP)$.

如图，连接 AG 并延长交 BC 于 D，继续延长至 E，使得 $DE=GD=\frac{1}{2}AG$.

连接 EB，EC，四边形 $GBEC$ 为平行四边形，则有 $EB=GC$.

延长射线 PG，过点 B 作 PG 的延长线的垂线，垂足为 F.

过点 E 作 PG 的延长线的垂线，垂足为 H，BE 与 PG 的延长线的交点为 Q.



因为 $GC \parallel BE$，所以 $\angle CGP=\angle EQG=\angle BQF$，

$GH=EG\cdot\cos\angle EGH=GA\cdot\cos\angle AGP$，

$HF=EB\cdot\cos\angle BQF=GC\cdot\cos\angle EQG=GC\cdot\cos\angle CGP$，

而 $GH+HF=GF=GB\cdot\cos\angle BGF=GB\cdot\cos(\pi-\angle BGP)$

$=-GB\cdot\cos\angle BGP$，

因此 $GA\cdot\cos\angle AGP+GB\cdot\cos\angle BGP+GC\cdot\cos\angle CGP=0$.

$$\begin{aligned}&GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2\\&=PA^2+PB^2+PC^2+2PG\cdot(GA\cdot\cos\angle AGP+GB\cdot\cos\angle BGP+GC\cdot\cos\angle CGP)\\&=PA^2+PB^2+PC^2.\end{aligned}$$

利用上面的结论，令 P 与 A 重合，有 $GA^2+GB^2+GC^2+3GA^2=AB^2+AC^2$，①

令 P 与 B 重合，有 $GA^2+GB^2+GC^2+3GB^2=AB^2+AC^2$，②

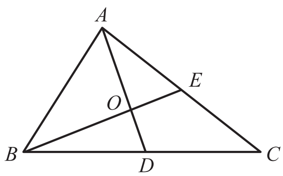
令 P 与 C 重合，有 $GA^2+GB^2+GC^2+3GC^2=AB^2+AC^2$，③

由①②③相加有

$$\begin{aligned}&3(GA^2+GB^2+GC^2)+3(GA^2+GB^2+GC^2)\\&=2(AB^2+BC^2+AC^2),\end{aligned}$$

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{AB^2+BC^2+AC^2}{3}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

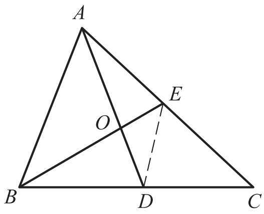
例 1　如图，在△ABC 中，中线 AD，BE 相交于点 O，若△BOD 的面积等于 5，求△ABC 的面积.



分析： 首先根据重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2∶1，判断出 $BO=2OE$，进而求出 $S_{\triangle DOE}$、$S_{\triangle BDE}$的大小；然后根据点 D 是 BC 的中点判断出 $S_{\triangle CDE}=S_{\triangle BDE}$，进而求出 $S_{\triangle BCE}$的大小；最后根据点 E 是 AC 的中点，判断出 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BCE}$，进而求出 $S_{\triangle ABC}$的大小.

解析： 如图，连接 DE，因为中线 AD，BE 相交于点 O，

所以点 O 是△ABC 的重心，$BO=2OE$，



所以 $S_{\triangle DOE}=\frac{1}{2}S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$，$S_{\triangle BDE}=5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$.

因为点 D 是 BC 的中点，所以 $BD=DC$，$S_{\triangle CDE}=S_{\triangle BDE}$，$S_{\triangle BCE}=\frac{15}{2}+\frac{15}{2}=15$.

因为点 E 是 AC 的中点，所以 $AE=CE$，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BCE}$，

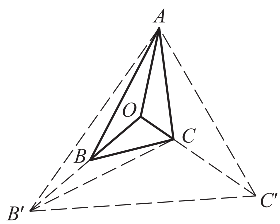
则 $S_{\triangle ABC}=15\times 2=30$，即 $\triangle ABC$ 的面积为 30.

例 2 已知点 O 为所在平面 ABC 上一点，且 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，求 $\triangle BOC$，$\triangle AOC$，$\triangle AOB$ 的面积之比.

分析： 由"$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$"可知，它是以点 O 为始点的三个向量和为零向量的等式. 联想到三角形的重心具有这一特征，可通过构造三角形重心来解决.

解析： 如图，延长 OB 到点 B'，使 $\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$，

延长 OC 到点 C'，使 $\overrightarrow{OC'}=3\overrightarrow{OC}$，连接 CB'，AB'，AC'，$B'C'$.



因为 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\mathbf{0}$.

则点 O 是 $\triangle AB'C'$ 的重心，于是 $S_{\triangle AOB'}=S_{\triangle AOC'}=S_{\triangle B'OC'}$.

又 $|\overrightarrow{OB'}|=2|\overrightarrow{OB}|$，$|\overrightarrow{OC'}|=3|\overrightarrow{OC}|$，

所以 $S_{\triangle AOB'}=2S_{\triangle AOB}$，$S_{\triangle AOC'}=3S_{\triangle AOC}$，$S_{\triangle B'OC}=2S_{\triangle BOC}$，$S_{\triangle B'OC'}=3S_{\triangle B'OC}$，

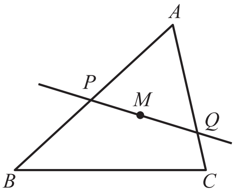
所以 $S_{\triangle B'OC'}=6S_{\triangle BOC}$，所以有 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB'}$，$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{3}S_{\triangle AOC'}$，$S_{\triangle BOC}=$

$\frac{1}{6}S_{\triangle B'OC'}$.

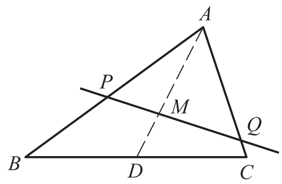
故 $S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle AOB}=\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=1:2:3$.

探　究

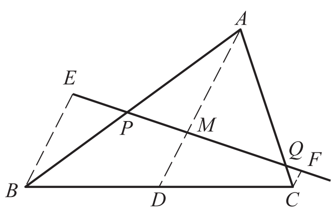
如图所示，设 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，过 M 的直线分别交边 AB，AC 于 P，Q 两点，且 $\frac{AP}{PB}=m$，$\frac{AQ}{QC}=n$，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=$ ____________.



上述问题实质就是求 $\frac{PB}{AP}+\frac{QC}{AQ}$ 的值. 如图，连接 AM 并延长与 BC 交于点 D，因为点 M 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线（D 为边 BC 的中点），且 $AM=2MD$，即 $\frac{MD}{AM}=\frac{1}{2}$. 这些都是由已知能得出的解决这一问题最基础的条件. 可以在此基础上，进一步思考添加辅助线的方法，从而产生多种不同的解法.



解法 1： 分别过点 B，C 作 $BE/\!/AD$，$CF/\!/AD$，交 PQ 于点 E，F，则 $BE/\!/AD/\!/CF$. 易知 $\triangle EBP\backsim\triangle MPA$，$\triangle AMQ\backsim\triangle CFQ$，从而有 $\frac{PB}{AP}=\frac{BE}{AM}$，$\frac{QC}{AQ}=\frac{CF}{AM}$.



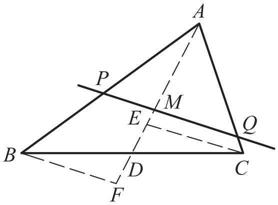
因为点 D 是 BC 的中点，所以 MD 是梯形 $CFEB$ 的中位线，所以 $BE+CF=2MD$.

所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{PB}{AP}+\frac{QC}{AQ}=\frac{BE}{AM}+\frac{CF}{AM}=$

$\frac{BE+CF}{AM}=1$.

解法 2： 欲将所求中的两个比例式$\frac{PB}{AP}$，$\frac{CQ}{AQ}$与$\frac{MD}{AM}=\frac{1}{2}$联系起来，可以想到通过作平行线的方法，构造新的三角形，进而利用线段之间的数量关系进行求值.

如图，过点 C，B 分别作 PQ 的平行线，交 AD 及 AD 的延长线于点 E，F.



则$\frac{1}{m}=\frac{PB}{AP}=\frac{FM}{AM}$，$\frac{1}{n}=\frac{QC}{AQ}=\frac{EM}{AM}$.

因为点 D 是 BC 的中点，且 $BF\parallel CE$，易证 $\triangle BFD\cong\triangle CED$.

所以 $DE=DF$.

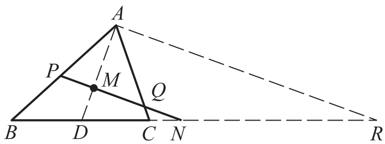
所以 $FM+EM=DE+DF+EM+EM=2(DE+EM)=2MD$.

故$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{FM+EM}{AM}=\frac{2MD}{AM}=1$.

解法 3： 如果过点 A 作 PQ 的平行线，又会产生怎样的结果呢？

如图，过点 A 作 $AR\parallel PQ$ 与 BC 的延长线交于点 R，

BC 的延长线与 PQ 的延长线交于点 N.



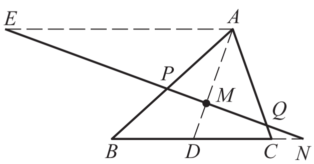
由平行线截线段成比例定理，得$\frac{1}{m}=\frac{PB}{AP}=\frac{BN}{NR}$，$\frac{1}{n}=\frac{QC}{AQ}=\frac{CN}{NR}$.

又因为$\frac{DM}{MA}=\frac{DN}{NR}=\frac{1}{2}$，

所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{BN+NC}{NR}=\frac{BD+DN+CN}{2DN}=\frac{DN+DN}{2DN}=1$.

解法 4： 我们也可以过点 A 作 BC 的平行线来构造三角形，于是产生解法 4.

如图，过点 A 作 $AE\parallel BC$，与直线 PQ 交于点 E，直线 PQ 与 BC 的延长线交于点 N.

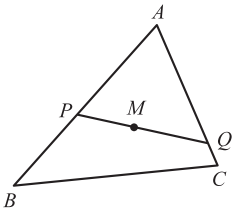


由平行线截线段成比例定理，得$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{BN}{AE}$，$\dfrac{QC}{AQ}=\dfrac{CN}{AE}$.

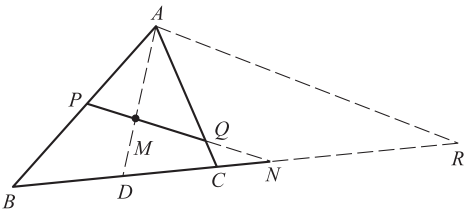
所以$\dfrac{PB}{AP}+\dfrac{QC}{AQ}=\dfrac{BN+CN}{AE}=\dfrac{BD+DN+CN}{AE}$.

又因为$\dfrac{DM}{MA}=\dfrac{DN}{AE}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{PB}{AP}+\dfrac{QC}{AQ}=\dfrac{2DN}{AE}=\dfrac{2DM}{MA}=1$.

推广 1　已知：点 M 为 $\triangle ABC$ 的中线上任意一点，过点 M 的直线与边 AB，AC 交于点 P，Q，延长 AM 交 BC 于点 D. 求证$\dfrac{BP}{PA}+\dfrac{CQ}{AQ}=2\dfrac{DM}{MA}$.



证明： 如图，连接 AM 并延长交 BC 于点 D，过点 A 作 PQ 的平行线 AR，与 BC 的延长线交于点 R，



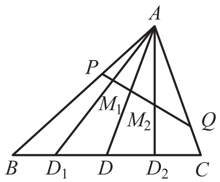
延长 PQ 与 BC 的延长线交于点 N.

由平行线截线段成比例定理，得$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{BN}{NR}$，$\dfrac{DM}{MA}=\dfrac{DN}{NR}$，$\dfrac{QC}{AQ}=\dfrac{CN}{NR}$.

所以$\dfrac{PB}{AP}+\dfrac{QC}{AQ}=\dfrac{BN+CN}{NR}=\dfrac{BD+DN+CN}{NR}$.

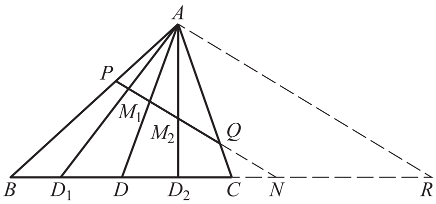
又因为$\dfrac{DM}{MA}=\dfrac{DN}{NR}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{PB}{AP}+\dfrac{QC}{AQ}=\dfrac{2DN}{NR}=\dfrac{2DM}{MA}$.

推广 2　如图，已知 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，把 AD 分裂为等截线 AD_1，AD_2，即点 D_1，D_2 在 BC 边上，且 D_1，D_2 分别是 BD，DC 的中点.



求证：$\dfrac{BP}{PA}+\dfrac{CQ}{AQ}=\dfrac{D_1M_1}{M_1A}+\dfrac{D_2M_2}{M_2A}$.

分析： 与推广 1 的证明方法类似，同样过点 A 作 PQ 的平行线 AR，与 BC 的延长线交于点 R，延长 PQ 与 BC 的延长线交于点 N（如图）.



由平行线截线段成比例定理，分别将所求证的等式左边$\frac{BP}{PA}+\frac{CQ}{AQ}$转化为$\frac{BP}{PA}+\frac{CQ}{AQ}=\frac{BN+CN}{NR}$，再将等式右边$\frac{D_1M_1}{M_1A}+\frac{D_2M_2}{M_2A}$转化为$\frac{D_1M_1}{M_1A}+\frac{D_2M_2}{M_2A}=\frac{D_1N}{NR}+\frac{D_2N}{NR}=\frac{BN-BD_1}{NR}+\frac{D_2C+CN}{NR}=\frac{BN+CN}{NR}$，于是等式成立.

证明： 略.

2.2.2　三角形中线公式

中线定义　在三角形中，连接一个顶点和它所对边的中点的线段叫做三角形的中线.

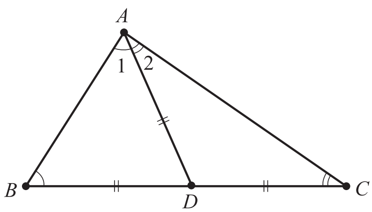
任何三角形都有三条中线，而且这三条中线都在三角形的内部，并交于一点.

三角形中线公式

$$\frac{1}{2}BC^2=AB^2+AC^2-2AD^2;$$

$$AD^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2;$$

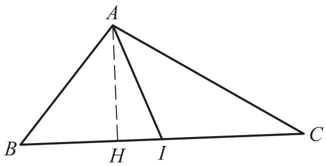
$$AD=\sqrt{\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2}.$$



中线定理　三角形一条中线两侧所对边平方和等于底边的一半的平方与该边中线平方和的 2 倍. 即，对任意三角形 ABC，设 I 是线段 BC 的中点，AI 为中线，则有如下关系：

$$AB^2+AC^2=\frac{1}{2}BC^2+2AI^2 \text{ 或 } AB^2+AC^2=2(AI^2+BI^2).$$

证明： **法 1** （利用勾股定理）



$AB^2+AC^2=(AH^2+BH^2)+(AH^2+HC^2)$

$=2(AI^2-HI^2)+(BI-HI)^2+(CI+HI)^2$

$=2AI^2-2HI^2+BI^2+HI^2-2BI\cdot HI+CI^2+HI^2+2CI\cdot HI$

$=2AI^2+BI^2+CI^2$

$=2(AI^2+BI^2)$.

法 2 以中点为原点，在水平和竖直方向建立坐标系，（图略）

设 $A(m, n)$，$B(-a, 0)$，$C(a, 0)$，

则 $AI^2+CI^2=m^2+n^2+a^2$，

$AB^2+AC^2=(m+a)^2+n^2+(m-a)^2+n^2=2(m^2+n^2+a^2)$，

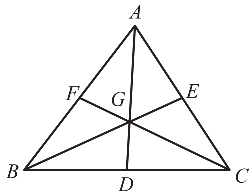
所以 $AB^2+AC^2=2(AI^2+CI^2)$.

例 1 求证：三角形三边的平方和的 3 倍等于三条中线平方和的 4 倍.

已知：在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D，E，F 分别为 BC，AC，AB 的中点.

求证：$4(AD^2+BE^2+CF^2)=3(AB^2+BC^2+AC^2)$.

证明： 如图，由中线定理知 $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$①，



$AB^2+BC^2=2(BE^2+CE^2)$②，

$BC^2+AC^2=2(CF^2+BF^2)$③，

①+②+③并整理得 $AD^2+BE^2+CF^2=\frac{3}{4}(AB^2+BC^2+AC^2)$，

即 $4(AD^2+BE^2+CF^2)=3(AB^2+BC^2+AC^2)$.

例 2 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D，E，F 分别为 BC，AD，CE 的中点. 且 $S_{\triangle ABC}=4\ \text{cm}^2$，则 $S_{\triangle BEF}=$________ cm^2.

解析： 根据三角形的中线性质可得 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$，$S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}$，进而得到 $S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，同理可得 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}$.