目录

Contents

第一章
线性方程组

线性方程组是线性代数的主要研究对象之一. 许多实际问题的应用，都可以归结为求解线性方程组的问题. 本章将介绍一般线性方程组的解法.

§1.1　线性方程组及其消元法

1.1.1　二、三元线性方程组及高斯消元法

在中学，我们曾经学习过解二、三元线性方程组的消元法. 下面通过几个例题回顾消元法的求解过程，并把这些过程规范化.

例 1　用消元法解线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2=6 & ① \\ 2x_1-2x_2=3 & ② \end{cases}$

解：②减去 2 倍的① ，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 & ③ \\ -4x_2=-9 & ④ \end{cases}$$

由④可得 $x_2=\frac{9}{4}$，将 $x_2=\frac{9}{4}$ 代入③可求得 $x_1=\frac{15}{4}$，

所以，方程组的解为$\begin{cases} x_1=\frac{15}{4} \\ x_2=\frac{9}{4} \end{cases}$

例 2　解线性方程组：$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=6 & ① \\ x_1-2x_2+4x_3=3 & ② \\ 5x_1+6x_2+4x_3=-1 & ③ \end{cases}$

解：②乘以-2 加到①，②乘以-5 加到③得，

$$\begin{cases} 2x_2-3x_3=0 & ④ \\ x_1-2x_2+4x_3=3 & ⑤ \\ x_2-x_3=-1 & ⑥ \end{cases}$$

⑥乘以-2 加到④得，

$$\begin{cases} -x_3=2 & ⑦ \\ x_1-2x_2+4x_3=3 & ⑧ \\ x_2-x_3=-1 & ⑨ \end{cases}$$

交换⑦与⑧，得

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=3 & ⑧ \\ -x_3=2 & ⑦ \\ x_2-x_3=-1 & ⑨ \end{cases}$$

在上式中，交换⑦与⑨，得

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=3 & ⑧ \\ x_2-x_3=-1 & ⑨ \\ -x_3=2 & ⑦ \end{cases}$$

由⑦得 $x_3=-2$，代入⑨得 $x_2=-3$，将 x_2,x_3 代入⑧，得 $x_1=5$，所以方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \\ x_3=-2 \end{cases}$$

例 3 解线性方程组：$\begin{cases} x_2-x_3=-3 & ① \\ x_1+3x_2=1 & ② \\ x_1-2x_2+3x_3=4 & ③ \\ -7x_2+3x_3=-3 & ④ \end{cases}$

解：交换方程①和②，得方程组$\begin{cases} x_1+3x_2=1 & ② \\ x_2-x_3=-3 & ① \\ x_1-2x_2+3x_3=4 & ③ \\ -7x_2+3x_3=-3 & ④ \end{cases}$

将②乘以 -1 加到③，①乘以 7 加到④，得方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2=1 & ② \\ x_2-x_3=-3 & ① \\ -5x_2+3x_3=3 & ⑤ \\ -4x_3=-24 & ⑥ \end{cases}$$

①乘以 5 加到⑤，⑥等号两边同时除以 -4，得方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2=1 & ② \\ x_2-x_3=-3 & ① \\ -2x_3=-12 & ⑦ \\ x_3=6 & ⑧ \end{cases}$$

⑦左右两边同时乘以 $-\frac{1}{2}$，得方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2=1 & ② \\ x_2-x_3=-3 & ① \\ x_3=6 & ⑨ \\ x_3=6 & ⑧ \end{cases}$$

由下到上逐个回代，就得到方程组的解$\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=3 \\ x_3=6 \end{cases}$

从上面例题求解过程可以看出，用消元法求解线性方程组的具体做法就是对方程组反复实施以下三种变换：

(i)交换某两个方程的位置；

(ii)用一个非零数乘以某一个方程的两边；

(iii)将一个方程的倍数加到另一个方程上去.

以上三种变换称为**线性方程组的初等变换**.

消元法的目的就是利用方程组的初等变换将原方程组化为阶梯形方程组，再通过回代得到方程组的解，这种解方程组的方法称为**高斯(Gauss)消元法**.

在一般情况下，我们对问题的讨论，都是在数的某个范围内进行的，同一个问题在不同的数的范围内的答案可能是不一样的. 例如，一元二次方程 $x^2+x+1=0$ 在实数范围内没有根，而在复数范围内有一对共轭复根. 因此，给出数域的定义.

定义 1 设 F 是一个数集，其中包括 0 与 1. 如果 F 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 F 中的数，那么数集 F 就称为一个数域.

显然，全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域. 这三个数域分别用字母 **Q**、**R**、**C** 来表示. 但整数的集合不是数域，因为两个整数的商未必是整数.

1.1.2 *n* 元线性方程组及其解法

下面讨论如何利用高斯消元法解一般的线性方程组.

一般地，n 元线性方程组是指 m 个方程，n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的系数，$b_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为常数项. 方程组中方程的个数 m 与未知量的个数 n 不一定相等. 系数 a_{ij} 的第一个角标 i 表示第 i 个方程，第二个角标 j 表示它是 x_j 的系数. 在方程组(1)中，当 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零时，方程组(1)称为**非齐次线性方程组**，当 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零时，方程组(1)称为**齐次线性方程组**.

所谓方程组(1)的一个**解**就是指 n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 组成的有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 代入后，(1)中每个方程都变成等式. 方程组(1)的解的全体构成的集合称为方程组的**解集**. **解方程组**实际上就是求出方程组的全部解，即解集. 若两个方程组有相同的解集，则它们被称为是**同解方程组**.

从前面的例子可以看到，解线性方程组的消元法是利用方程组的初等变换把方程组化成阶梯形，再通过阶梯形的方程组求解. 那么，初等变换会不会改变方程组的解？回答是否定的.

定理 1 线性方程组(1)经初等变换后，得到的新方程组与原方程组(1)同解.

证明：只需证明经过一次初等变换后，方程组的解不变即可.

进行(i)(ii)两种变换得到的新方程组显然与原方程组(1)同解. 只要证(iii)的情况. 不妨设用 k 乘(1)的第二个方程，加到第一个方程上去，得到的新方程组为

$$\begin{cases} (a_{11}+ka_{21})x_1+(a_{12}+ka_{22})x_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})x_n=b_1+kb_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1$'$}$$

若 $x=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是(1)的解，则 x 使(1)成为 m 个等式，即

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n=b_m \end{cases} \tag{2}$$

用 k 乘(2)的第二等式加到第一个等式上去，得到

$$\begin{cases} (a_{11}+ka_{21})c_1+(a_{12}+ka_{22})c_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})c_n=b_1+kb_2 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n=b_m \end{cases} \tag{3}$$

(3)式说明 $x=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是($1'$)的解. 反之，若 x 是($1'$)的解，则 x 使(3)式成立，用($-k$)乘(3)的第二个等式加到第一个等式上去，就得到(2)式，因而 x 是(1)的解. 因此，(1)与($1'$)同解.

接下来我们讨论线性方程组(1)的解的问题.

利用消元法解方程组(1)的过程如下：

首先检查 x_1 的系数，如果 x_1 的系数 $a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1}$ 都为零，x_1 就可以取任何值，则方程组(1)可以看作 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的方程组来解. 如果 x_1 的系数不全为零，那么可以通过交换线性方程组中方程的位置使得 $a_{11}\neq 0$，再分别把第一个方程的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程($i=2,3,\cdots,m$). 于是方程组(1)就变成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2 \\ \qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mn}x_n=b'_m \end{cases} \tag{4}$$

其中 $a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\times a_{1j},\ i=2,\cdots,m;j=2,\cdots,n$. 对方程组(4)其余的 $m-1$ 个方程组，如此不断进行下去，最后得到如下与方程组(1)同解的阶梯形方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{5}$$

其中 $c_{ii}\neq 0,i=1,\cdots,r$，也就是说，方程组(5)中前 r 个方程是有效方程，而后 $m-(r+1)$ 个方程均为无效方程，因为无论 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取什么值，这些等式都是成立的，去掉这些方程的解集不会改变. 第 $r+1$ 个方程是否有效，要视 d_{r+1} 是否为零而定.

当(5)中的 $d_{r+1}\neq 0$ 时，方程组(5)无解（因为此时无论 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取什么值，等式

$0=d_{r+1}$都不会成立),即方程组(1)无解.

当(5)中的 $d_{r+1}=0$ 时,方程组(5)有解,解的情况如下:

1. 当 $r=n$ 时,阶梯形方程组(5)变为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n=d_n \end{cases} \tag{6}$$

从第 n 个方程开始依次回代就得到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 一组确定的值. 在这种情形下,方程组(6)有唯一解,即方程组(1)有唯一解.

2. 当 $r<n$ 时,阶梯形方程组(5)变为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \\ \qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{7}$$

去掉无效方程并移项,(7)可以写成

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases} \tag{8}$$

方程组(8)中,当 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 任意取一组确定的值,就唯一地确定 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的一组值,两组值合起来也就确定了(8)的一个解,由于 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 取值的任意性,此时方程组(7)有无穷多个解,即方程组(1)有无穷多个解. 一般地,由(8)我们可以把 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 通过 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 表示出来,这样一组表达式称为(1)的**通解**或**一般解**. $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 称为自由未知量.

注意:$r>n$ 的情况显然是不存在的.

综上讨论可得出下面定理:

定理 2 对 n 元非齐次线性方程组(1)经过消元法化为阶梯形方程组(5),有:

当 $d_{r+1}\neq 0$ 时,方程组(1)无解;

当 $d_{r+1}=0$,且 $r=n$ 时,方程组(1)有唯一解;

当 $d_{r+1}=0$,且 $r<n$ 时,方程组(1)有无穷多解.

例 4 解线性方程组:$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=6 & ① \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 & ② \\ 5x_1+3x_2+4x_3=27 & ③ \end{cases}$

解:②乘以-1加到①,得

$$\begin{cases}-x_1-x_2+2x_3=5 & ④\\ 3x_1+2x_2+x_3=1 & ②\\ 5x_1+3x_2+4x_3=27 & ③\end{cases}$$

④乘以 3 加到②,④乘以 5 加到③,得

$$\begin{cases}-x_1-x_2+2x_3=5 & ④\\ -x_2+7x_3=16 & ⑤\\ -2x_2+14x_3=52 & ⑥\end{cases}$$

⑤乘以−2 加到⑥,得

$$\begin{cases}-x_1-x_2+2x_3=5 & ④\\ \quad -x_2+7x_3=16 & ⑤\\ \qquad\qquad 0=20 & ⑦\end{cases}$$

显然,不可能有 x_1,x_2,x_3 的值满足方程⑦,因此方程组无解.

例 5 解线性方程组:$\begin{cases}3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 & ①\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 & ②\\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4=-3 & ③\\ 3x_1+5x_2+2x_3-2x_4=-10 & ④\end{cases}$

解:交换方程①和②,得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 & ②\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 & ①\\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4=-3 & ③\\ 3x_1+5x_2+2x_3-2x_4=-10 & ④\end{cases}$$

在上式中,将②乘以−3 加到①,②乘以−2 加到③,②乘以−3 加到④,得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 & ②\\ \quad -4x_2-7x_3-11x_4=-7 & ⑤\\ \qquad x_2+x_3-4x_4=-5 & ⑥\\ \quad 2x_2-4x_3-11x_4=-13 & ⑦\end{cases}$$

在上式中,将⑥乘以 4 加到⑤,⑥乘以−2 加到⑦,得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 & ②\\ \qquad -3x_3-27x_4=-27 & ⑧\\ \quad x_2+x_3-4x_4=-5 & ⑥\\ \qquad -6x_3-3x_4=-3 & ⑨\end{cases}$$

交换方程⑥、⑧,得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 & ②\\ \quad x_2+x_3-4x_4=-5 & ⑥\\ \qquad -3x_3-27x_4=-27 & ⑧\\ \qquad -6x_3-3x_4=-3 & ⑨\end{cases}$$

将⑧乘以-2加到⑨,得到同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+\ 3x_4=1 & ② \\ \quad\ \ x_2+\ x_3-\ 4x_4=-5 & ⑥ \\ \qquad\ -3x_3-27x_4=-27 & ⑧ \\ \qquad\qquad\quad 51x_4=51 & ⑩ \end{cases}$$

方程⑩等号两边同时除以51,得

$$x_4=1$$

由下到上逐个回代,就得到方程组唯一解

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-1 \\ x_3=0 \\ x_4=1 \end{cases}$$

例 6 解线性方程组:$\begin{cases} x_1+\ x_2+x_3=37 & ① \\ 2x_1+4x_2 \qquad =94 & ② \end{cases}$

解:②两边同除以2,得

$$\begin{cases} x_1+\ x_2+x_3=37 & ① \\ x_1+2x_2 \qquad =47 & ③ \end{cases}$$

①乘以-1加到③,得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=37 & ① \\ \qquad x_2-x_3=10 & ④ \end{cases}$$

④乘以-1加到①,得

$$\begin{cases} x_1 \quad +\ 2x_3=27 & ⑤ \\ \qquad x_2-x_3=10 & ④ \end{cases}$$

上面这个方程组变形为$\begin{cases} x_1=-2x_3+27 \\ x_2=x_3+10 \end{cases}$

x_3可以取任意值,称为自由未知量.对于x_3的每一取定的值,可唯一确定x_1,x_2的值,从而得到原方程组的一个解,因此原方程组有无穷多个解.令$x_3=k$(k为任意常数),得到方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1=-2k+27 \\ x_2=k+10 \\ x_3=k \end{cases}$$

我们知道,齐次线性方程组一定有解.因为所有的未知量都取零就是它的一个解,称为齐次线性方程组的**零解**.那么,对于齐次线性方程组,应该将定理2叙述为:

定理 3 对n元齐次线性方程组(1)经过消元法化为阶梯形方程组(5),有:

当$r=n$时,方程组(1)只有零解;

当$r<n$时,方程组(1)有无穷多解(即有非零解).

推论 m个方程n个未知数的齐次线性方程组,如果$m<n$,则方程组一定有非

零解.

例 7 齐次线性方程组：$\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 & ① \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 & ② \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 & ③ \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 & ④\end{cases}$

解：①乘以－1 加到②，①乘以－1 加到③，①乘以－2 加到④，得到同解方程组

$$\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 & ① \\ x_1+7x_2-8x_3+9x_4=0 & ⑤ \\ -x_1-7x_2+8x_3-9x_4=0 & ⑥ \\ x_1-10x_2+11x_3-11x_4=0 & ⑦\end{cases}$$

将⑥加到⑤，⑥加到⑦，⑥乘以 3 加到①得到同解方程组

$$\begin{cases}-17x_2+19x_3-20x_4=0 & ⑧ \\ 0=0 & ⑨ \\ -x_1-7x_2+8x_3-9x_4=0 & ⑥ \\ -17x_2+19x_3-20x_4=0 & ⑩\end{cases}$$

将⑩乘以－1 加到⑧，得到同解方程组

$$\begin{cases}0=0 & ⑪ \\ 0=0 & ⑨ \\ -x_1-7x_2+8x_3-9x_4=0 & ⑥ \\ -17x_2+19x_3-20x_4=0 & ⑩\end{cases}$$

于是得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{17}x_3-\dfrac{13}{17}x_4 \\ x_2=\dfrac{19}{17}x_3-\dfrac{20}{17}x_4\end{cases}$ （x_3，x_4 取任意值）. 因此原方程组有无穷多解.

例 8 求 λ，μ 为何值时，线性方程组：$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6 & ① \\ x_1-x_2+6x_3=0 & ② \\ 3x_1-2x_2+\lambda x_3=\mu & ③\end{cases}$

有唯一解？无解？有无穷多个解？

解：①乘以－1 加到②，①乘以－3 加到③，得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6 & ① \\ -3x_2+3x_3=-6 & ④ \\ -8x_2+(\lambda-9)x_3=\mu-18 & ⑤\end{cases}$$

④等号两边同时除以－3，得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6 & ① \\ x_2-x_3=2 & ⑥ \\ -8x_2+(\lambda-9)x_3=\mu-18 & ⑤\end{cases}$$

⑥乘以 8 加到⑤，得到同解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 & ① \\ x_2-x_3=2 & ⑥ \\ (\lambda-17)x_3=\mu-2 & ⑦ \end{cases}$$

因此，当 $\lambda\neq17$ 时，方程组有唯一解；当 $\lambda=17$，而 $\mu\neq2$ 时，方程组无解；当 $\lambda=17$，$\mu=2$ 时，方程组有无穷多解.

习题 1.1

1. 解下列非齐次线性方程组．

(1) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2 \\ 3x_1-x_2+2x_3=10 \\ 11x_1+x_2=8 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 3x_1+8x_2-2x_3=13 \\ x_1-2x_2+4x_3=-5 \\ 4x_1-x_2+9x_3=-6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=-1 \\ 3x_1-2x_2-x_3+2x_4=4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=7 \\ 2x_1+x_2+3x_3=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=2 \\ 5x_1+2x_3=11 \end{cases}$

2. 解下列齐次线性方程组．

(1) $\begin{cases} 4x_1-5x_2-7x_3+9x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0 \\ -x_1+7x_2-4x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-5x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_4-x_5=0 \\ -x_1-4x_2+5x_3-x_4=0 \\ 3x_1+7x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ -2x_1-5x_2+x_3-5x_4+3x_5=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x_1-5x_2-x_3+4x_4=0 \\ 3x_1-5x_2-9x_3+11x_4=0 \\ 3x_1-7x_2-3x_3+7x_4=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \\ -x_1-x_5=0 \\ -x_2+x_4-x_6=0 \\ -x_3+x_5=0 \\ -x_4-x_6=0 \end{cases}$

3. 讨论下列含有参数的线性方程组，求 λ 为何值时，线性方程组有解？并求出方程组的解.

(1) $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=1\\x_1+x_2+\lambda x_3=1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\\\lambda x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1\\x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x_1+(\lambda^2+1)x_2+2x_3=\lambda\\\lambda x_1+\lambda x_2+(2\lambda+1)x_3=0\\x_1+(2\lambda+1)x_2+2x_3=2\end{cases}$

(6) $\begin{cases}(3+\lambda)x_1+x_2+2(\lambda+1)x_3=0\\3x_1+(\lambda+1)x_2+(\lambda+2)x_3=0\\3(\lambda+1)x_1+(1-\lambda)x_2+2x_3=0\end{cases}$

§1.2 矩阵与向量初步

从上一节我们可以知道，解方程组的消元过程完全是系数和常数项的运算. 因此，解方程组完全可以在方程组的系数和常数项上进行. 因此，我们引入向量和矩阵的概念，并讨论向量的线性运算和矩阵的初等变换. 而关于向量和矩阵的其他内容，将在第二章和第三章讨论.

1.2.1 向量及其线性运算

建立空间直角坐标系后，几何空间中的向量可以用三元有序数组表示为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_x, a_y, a_z)$，并称为三维向量. 然而，在实际问题中，很多研究对象可能要用三个以上的有序实数来表示. 例如，空间的一个球体，需要用一个 4 元有序数组 (x, y, z, R) 表示其球心位置和球的半径；5 元线性方程组的解要用 5 元有序数组 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 来表示. 这些例子说明几何空间的三维向量已经不够用了. 因此，我们介绍 n 维向量.

定义 1 数域 F 上 n 个数构成的 n 元有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

称为数域 F 上一个 **n 维向量**. 其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为这个向量的第 i 个**分量**. 若向量的每个分量 a_i 都是实数，称为实向量，若分量 a_i 中有复数，则称为复向量.

如无特别声明，本书讨论均为**实向量**，并简称为**向量**.

通常用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots$ 表示**向量**.

向量有时写成一行

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为行向量(也称为行矩阵). 有时也写成一列

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \tag{2}$$

称为**列向量**(也称为列矩阵). 分量相同的行向量和列向量视为同一向量,它们的区别只是写法的不同而已. 若记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,则记 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 在不会引起混乱的情况下,行向量和列向量都称为向量. 但是,在同一个运算的过程中,要么都用行向量,要么都用列向量表示. 也常用下面的记法

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

定义中当 $n=2$ 和 $n=3$ 时的向量,就是平面向量和几何空间的向量.

例 1 n 元线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的未知量的系数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 就是一个 n 维向量,称为这个方程的**系数向量**.

分量全为零的向量称为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$. 二维零向量为 $(0,0)$,三维零向量为 $(0,0,0)$,…,n 维零向量为 $(0,0,\cdots,0)$,有时它们都不加区别地用 $\mathbf{0}$ 来表示.

定义 2 如果两个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的对应分量都相等,即

$$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

则称这两个向量**相等**,记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

例 2 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x+y,x-y,2z+1)$,$\boldsymbol{\beta}=(2,4,7)$ 满足等式 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,求实数 x,y,z 的值.

解:因为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,所以有

$$\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\\2z+1=7\end{cases}$$

解线性方程组,得 $x=3,y=-1,z=3$.

定义 3 设有两个 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

称 n 维向量

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**和向量**,记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n) \tag{5}$$

也就是说,两个向量相加就是它们的对应分量相加.

例如,$(1,-2,5,0)+(2,3,1,-2)=(1+2,-2+3,5+1,0+(-2))=(3,1,6,-2)$.

定义 4 向量 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 被称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

例如, $-(1,-2,5)=(-1,2,-5)$.

利用负向量,我们可以定义向量的减法.

定义 5 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**差向量** $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 定义为

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$$

即:向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,那么

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n) \tag{6}$$

也就是说,两个向量相减,就是它们的对应分量相减.

例如,$(1,2,3)-(3,2,1)=(1-3,2-2,3-1)=(-2,0,2)$.

定义 6 设 λ 是实数,向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,称向量$(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数 λ 的**数量乘积**,记作 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 即

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n) \tag{7}$$

也就是说,一个数和一个向量相乘,就是用这个数乘以这个向量的每个分量.

例如,$3(1,-2,5)=(3\times1,3\times(-2),3\times5)=(3,-6,15)$.

根据数量乘法的定义,对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与实数 λ,显然有下列性质:

(1)$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;(2)$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;(3)$\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$;(4) 如果 $\lambda\neq0$,$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,那么 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

我们把向量的加法和数与向量的乘法运算统称为向量的**线性运算**. 关于线性运算有下列性质.

性质:对于任意 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 和任意实数 λ,μ,都有:

(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;　(2)$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3)$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;　(4)$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5)$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$;　(6)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$;

(7)$\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$;　(8)$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

例 3 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,2,3)$,$\boldsymbol{\beta}=(-2,1,2,0)$,求满足 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}-3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ 的向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

解:因为 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}-3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$,所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}&=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{3}[(1,0,2,3)+2(-2,1,2,0)]\\&=\frac{1}{3}[(1,0,2,3)+(-4,2,4,0)]=\frac{1}{3}(-3,2,6,3)=\left(-1,\frac{2}{3},2,1\right).\end{aligned}$$

例 4 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$,$-\boldsymbol{\alpha}=(2-a,3b+c,a-b)$,求 a,b,c 的值.

解:因为$-\boldsymbol{\alpha}=(2-a,3b+c,a-b)$,所以 $\boldsymbol{\alpha}=-(2-a,3b+c,a-b)$,

又因为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$,所以

$(1,2,3)=-(2-a,3b+c,a-b)=(a-2,-3b-c,b-a)$

转化为方程组,得

$$\begin{cases}a-2=1\\-3b-c=2\\b-a=3\end{cases}$$

解方程组,得 $a=3$,$b=6$,$c=-20$.

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{8}$$

如果记 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

那么线性方程组(8)可以写成向量形式

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{b} \tag{9}$$

方程组(8)的每个解$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 都是一个 n 维向量,称为方程组(8)的**解向量**. 当然$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$也满足(9)式成立,所以也是向量方程(9)的一个解向量. 反之,向量方程(9)的每个解向量也是方程组(8)的一个解向量.

1.2.2 矩阵及其初等变换

1. 矩阵的概念

引入:我们先来看§1.1 的例 2,三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=6 \\ x_1-2x_2+4x_3=3 \\ 5x_1+6x_2+4x_3=-1 \end{cases}$$

我们知道,线性方程组完全被未知量的系数和常数项所唯一确定. 我们可以将三个方程的系数与常数项排成一个三行四列的数表,用大括号括起来,即得

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

方程组与这个数表是一一对应的,这个数表就称为一个矩阵.

定义 7 数域 F 中 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵,简称**矩阵**. 构成矩阵的 $m\times n$ 个数都称为这个矩阵的元素,a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素,i 和 j 分别表示该元素所在的行和列,称为 a_{ij} 的行标和列标. 当 $a_{ij}=0$ 时,称 a_{ij} 为零元,否则称为非零元. 通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵,例如上面的 $m\times n$ 矩阵可记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,有时也记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

实数域上的矩阵称为**实矩阵**,复数域上的矩阵称为**复矩阵**. 若无特别声明,本书中的矩阵都指实矩阵.

例如，$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\3 & 0 & 9\end{pmatrix}$是一个 2×3 矩阵.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

例如，$\boldsymbol{O}_{2\times2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$是 2×2 的零矩阵，$\boldsymbol{O}_{3\times3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$是 3×3 的零矩阵，而 $\boldsymbol{O}_{2\times3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$是 2×3 的零矩阵，有时它们都不加区别地用 $\boldsymbol{O}$ 来表示.

下面给出两种在今后常常用到的矩阵——**行阶梯形矩阵和行最简形矩阵**.

定义 8 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有零行（元素全为零的行），则零行都在非零行（元素不全为零的行）的下面，而且每个非零行的首非零元（第一个不为零的元素）的下面全为零，这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**行阶梯形矩阵**. 如果行阶梯形矩阵中的每个非零行的首非零元均为 1，且每个首非零所在列的其他元素都为零，这样的行阶梯形矩阵称为**行最简形矩阵**.

例如，下列矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 1\\0 & 0 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 5\\0 & 2 & 4 & 3 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 1 & 5\\0 & 0 & 0 & 3 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

都是行阶梯形矩阵.

例如，下列矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 4 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 5\\0 & 0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

都是行最简形矩阵.

2. 矩阵的初等变换

再来看 §1.1 的例 2，我们用消元法解线性方程组$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=6 & ①\\x_1-2x_2+4x_3=3 & ②\\5x_1+6x_2+4x_3=-1 & ③\end{cases}$时，把每个方程组对应的矩阵写出来，观察这些矩阵的变化情况.

解：$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=6 & ①\\x_1-2x_2+4x_3=3 & ②\\5x_1+6x_2+4x_3=-1 & ③\end{cases}$ $\qquad\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 6\\1 & -2 & 4 & 3\\5 & 6 & 4 & -1\end{pmatrix}$

②乘以 -2 加到①，②乘以 -5 加到③，得

$$\begin{cases}2x_2-3x_3=0 & ④\\x_1-2x_2+4x_3=3 & ⑤\\x_2-x_3=-1 & ⑥\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 0\\1 & -2 & 4 & 3\\0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

⑥乘以 -2 加到④，得

$$\begin{cases} \quad\quad\quad -x_3=2 & ⑦ \\ x_1-2x_2+4x_3=3 & ⑧ \\ \quad\quad x_2-x_3=-1 & ⑨ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

交换⑦与⑧,得

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=3 & ⑧ \\ \quad\quad\quad -x_3=2 & ⑦ \\ \quad\quad x_2-x_3=-1 & ⑨ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

在上式中,交换⑦与⑨,得

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=3 & ⑧ \\ \quad\quad x_2-x_3=-1 & ⑨ \\ \quad\quad\quad -x_3=2 & ⑦ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

由⑦得 $x_3=-2$,代入⑨得 $x_2=-3$,将 x_2,x_3 代入⑧,得 $x_1=5$,

所以方程组的解为 $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \\ x_3=-2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

观察这些矩阵的关系,从中我们发现,对方程组消元的过程就是对系数与常数项组成的矩阵作如下三种变换:

(i)交换两行.(交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$)

(ii)以 $k\neq0$ 乘某行.(k 乘第 i 行记作 kr_i)

(iii)以 k 乘某行加到另一行.(k 乘第 j 行加到第 i 行记作 r_i+kr_j)

这样的三种变换,称为矩阵的**行初等变换.**

将三种变换中的"行"改为"列",就称为**列初等变换.**(记号依次换作 $c_i\leftrightarrow c_j$,kc_i,c_i+kc_j). 行初等变换与列初等变换统称为矩阵的**初等变换.**

矩阵经初等变换后会发生改变. 我们用 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换化成矩阵 $\boldsymbol{B}$,用 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{B}$ 表示仅用行初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 化成 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c}\boldsymbol{B}$ 表示仅用列初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 化成 $\boldsymbol{B}$.

矩阵的初等变换有以下性质:

定理 1 任何 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以经过一系列行初等变换化为行阶梯形矩阵. 即

$$A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_r & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

证明：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. 考察 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列，分三种情况：

第一种情况：$a_{11}\neq 0$，这时第 1 行依次乘以 $-\frac{a_{21}}{a_{11}},-\frac{a_{31}}{a_{11}},\cdots,-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$，分别加到第 2,3,⋯，$n$ 行上，记 $a_1=a_{11}$，得到

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} \tag{Ⅰ}$$

第二种情况：$a_{11}=0$，但第 1 列有一个元素 $a_{i1}\neq 0$. 这时将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行加到第 1 行上，则第 1 行第 1 列元素为 $a_{i1}\neq 0$，和第一种情况一样，可用第三种行初等变换，将化为(Ⅰ)的形式，此时 $a_1=a_{i1}$.

第三种情况：$\boldsymbol{A}$ 的第 1 列元素全为 0. 这时不必作任何变换，它本身就是(Ⅰ)的形式，此时 $a_1=0$.

因此，无论哪种情况，都可以仅用第三种行初等变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为(Ⅰ)的形式. 再对(Ⅰ)的第二列元素 $a'_{22},\cdots,a'_{n2}$ 和前面作同样的讨论，可以仅用第三种行初等变换，将(Ⅰ)化为

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

以此类推，经过若干次第三种行初等变换，就可将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵.

例 5　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

解：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\div 2]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+5r_2 \\ r_4-3r_2}]{r_2\div 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1$$

矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 为行阶梯形矩阵.

行阶梯形矩阵的特点：

(i)可划出一条阶梯线,线的下方全为零；

(ii)每个台阶只有一行,阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元.

对矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 继续用第三种行初等变换：

$$\boldsymbol{A}_1 \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_2$$

我们称矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 为**行最简形矩阵**.

行最简形矩阵的特点:非零行的第一个非零元为 1,且这些非零元所在的列的其他元素都为零.

对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,总可以经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

习题 1.2

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,1)$,$\boldsymbol{\beta}=(1,3,-1)$,$\boldsymbol{\gamma}=(0,2,3)$,求 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-4\boldsymbol{\gamma}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 满足:$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}=(2,3,-1)$,$\boldsymbol{\beta}=(1,-1,2)$,求向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,1)$,$-2\boldsymbol{\alpha}=(2-a,3b-c,a+c)$,求 a,b,c 的值.

4. 解向量方程 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x})-5(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,4,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,2)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1,-1)$.

5. 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与实数 λ,证明下列性质：

(1)$0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$；　　(2)$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$；

(3)$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$；　　(4) 如果 $\lambda\neq0$,$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,那么 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

6. 利用行初等变换,将下列矩阵化为行最简形.

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$　　(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$　　(4)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

§1.3 消元法的矩阵表示

在给定的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

由未知量的系数构成的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

称为线性方程组(1)的**系数矩阵**,而由未知量的系数和常数项构成的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

称为线性方程组(1)的**增广矩阵**.

解线性方程组的消元法,就是对方程组施以初等变换把方程组化为阶梯形. 这相当于对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作行初等变换将其化为行阶梯形矩阵.

回顾§1.1 例 5 的解法,用矩阵表示如下:

例 1 解线性方程组:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1+5x_2+2x_3-2x_4=-10 \end{cases}$$

解:对增广矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -2 & -10 \end{pmatrix}$作行初等变换,化为阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -2 & -10 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{\substack{r_2+(-3)r_1\\ r_3+(-2)r_1}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&-4&-7&-11&-7\\0&1&1&-4&-5\\0&2&-4&-11&-13\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-2)r_3]{r_2+4r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&0&-3&-27&-27\\0&1&1&-4&-5\\0&0&-6&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&-5\\0&0&-3&-27&-27\\0&0&-6&-3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+(-2)r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&-5\\0&0&-3&-27&-27\\0&0&0&51&51\end{pmatrix}$$

得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_2+x_3-4x_4=-5\\-3x_3-27x_4=-27\\51x_4=51\end{cases}$$

由最后一个方程得到，$x_4=1$

由下到上逐个回代，就得到方程组唯一解 $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-1\\x_3=0\\x_4=1\end{cases}$

如果是齐次线性方程组，常数项零在初等变换下是不变的，所以求解时只对系数矩阵作行初等变换就可以了.

例 2 设齐次线性方程组为

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0\\3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0\end{cases}$$

求方程组的解.

解：对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换，化为阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{3}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\0&0&-\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\\0&0&7&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{2}{7}r_2]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&-2&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&7&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-7r_2]{r_1-\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得到同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-2x_2-\dfrac{2}{7}x_4=0 \\ x_3+\dfrac{5}{7}x_4=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1=2x_2+\dfrac{2}{7}x_4 \\ x_3=-\dfrac{5}{7}x_4 \end{cases}$$

取 $x_2=k_1, x_4=k_2$，则 $x_1=2k_1+\dfrac{2}{7}k_2, x_3=-\dfrac{5}{7}k_2$，

$$\text{得解} \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2k_1+\dfrac{2}{7}k_2 \\ k_1 \\ -\dfrac{5}{7}k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \dfrac{2}{7} \\ 0 \\ -\dfrac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

用矩阵的**行初等变换**解线性方程组(1)的步骤如下：

第一步，写出增广矩阵 $\boldsymbol{B}$(若是齐次方程组，写出系数矩阵 $\boldsymbol{A}$)；

第二步，对 $\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{A}$)作行初等变换，使其化成行阶梯形矩阵，即

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,r. \tag{4}$$

第三步，判断方程组解的情况：

(i)当 $d_{r+1}\neq 0$ 时，则方程组(1)无解；

(ii)当 $d_{r+1}=0$，且 $r=n$ 时，方程组(1)有唯一解；

(iii)当 $d_{r+1}=0$，且 $r<n$ 时，方程组(1)有无穷多解.

第四步，若有解，写出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 对应的方程组，它是一个阶梯形方程组，通过这个同解的阶梯形方程组回代求解.

如果是齐次线性方程组，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的最后一列全为零，那么只需通过第三步中的(ii)(iii)判定是唯一解还是无穷多个解即可.

其实，第四步的回代求解，也可以通过消元完成. 此时矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = C\,(c_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,r.\,)”$$

从最后一个非零行开始，第 r 行乘以 $\frac{1}{c_{rr}}$，那就是继续对矩阵 $\boldsymbol{C}$ 作行初等变换将其化为下列行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c'_{1r+1} & \cdots & c'_{1n} & d'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c'_{2r+1} & \cdots & c'_{2n} & d'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c'_{rr+1} & \cdots & c'_{rn} & d'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D} \tag{5}$$

通过矩阵 $\boldsymbol{D}$，可直接写出方程组的一般解：

$$\begin{cases} x_1 = d'_1 - c'_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - c'_{1n}x_n \\ x_2 = d'_2 - c'_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - c'_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ x_r = d'_r - c'_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - c'_{rn}x_n \end{cases}$$

例 3　k 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多组解？在有解情况下，求出其全部解.

解：写出增广矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$，作行初等变换，得

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 1 & \frac{k-2}{2} & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-(k+1)r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{k+2}{2} & 0\\ 0 & 1 & \dfrac{k-2}{2} & 4\\ 0 & 0 & \dfrac{(k+1)(4-k)}{2} & k(k-4)\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$$

当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时,方程组有唯一解.

为了求出唯一解,可再对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作行初等变换如下:

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow{\frac{2}{(k+1)(4-k)}r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{k+2}{2} & 0\\ 0 & 1 & \dfrac{k-2}{2} & 4\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2k}{k+1}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-\frac{k+2}{2}r_3]{r_2-\frac{k-2}{2}r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dfrac{k^2+2k}{k+1}\\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{k^2+2k+4}{k+1}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2k}{k+1}\end{pmatrix}$$

写出最后矩阵对应的同解方程组,就得唯一解为

$$x_1=\frac{k^2+2k}{k+1},x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1},x_3=\frac{-2k}{k+1}$$

当 $k=-1$ 时,增广矩阵化为

$$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

可知方程组无解.

当 $k=4$ 时,增广矩阵化为

$$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

方程组有无穷多组解. 通解为 $\begin{cases}x_1=-3x_3\\ x_2=4-x_3\end{cases}$ (x_3 是自由未知量).

令 $x_3=k$,得通解为 $x_1=-3k,x_2=4-k,x_3=k$(k 为任意常数),写成列向量形式为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3k\\ 4-k\\ k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 0\end{pmatrix}.$$

习题 1.3

1.求下列齐次线性方程组解的情况.

(1) $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+x_2+7x_3-2x_4=0 \\ x_1-3x_2-12x_3+6x_4=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3=0 \\ -2x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \\ -x_1+x_3-x_5=0 \\ -x_2+x_4-x_6=0 \\ -x_3+x_5=0 \\ -x_4-x_6=0 \end{cases}$

2. 求下列非齐次线性方程组解的情况.

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+x_2-5x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+3x_2-13x_3=-6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=27 \\ 2x_1+x_2+3x_3=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=2 \\ 4x_1+x_2=8 \\ 5x_1+2x_3=11 \end{cases}$

3. λ 取何值时,下列线性方程组:有唯一解?无解?有无穷多个解?

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4 \\ -x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)2x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1+(\lambda^2+1)x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(2\lambda+1)x_3=0 \\ x_1+(2\lambda+1)x_2+2x_3=2 \end{cases}$

4. 确定 a,b 的值使下列线性方程组有解,求出其全部解.

(1) $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=a \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=a-3 \\ x_1+ax_2+x_3=-2 \\ x_1-x_2+ax_3=-2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$

总 习 题 一

A 组

1. 用消元法求解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=6 \\ x_1-2x_2+4x_3=3 \\ 5x_1-7x_2-x_3=12 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=-1 \\ x_1-4x_2+2x_3-2x_4+3x_5=3 \\ 4x_1-10x_2+3x_3-5x_4+7x_5=8 \\ 5x_1-8x_2+2x_3-4x_4+5x_5=7 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$

2. 解下列齐次线性方程组.

(1) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0 \end{cases}$

(3) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$

(4) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+2x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0 \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0 \end{cases}$

3. 解下列非齐次线性方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x_1-3x_2-5x_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1-2x_2-4x_3+6x_4=-1 \end{cases}$　　(4) $x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=1$

(5) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_4=-1 \\ -x_1-3x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=1 \\ 2x_1-3x_2+7x_3+3x_4=4 \end{cases}$

4. a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$ 有解，并求其解.

5. a 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4 \\ -x_1+ax_2+x_3=a^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$$

(1)有唯一解;(2)无解;(3)有无穷多个解?

B 组

1. 求下列线性方程组的解.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+5x_3+2x_4=21 \\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=10 \\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=8 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=15 \\ 7x_1+4x_2+5x_3+2x_4=18 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases}$

2. 求 a,b 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2=3\\4x_1+7x_2+x_3=10\\x_2-x_3=b\\2x_1+3x_2+ax_3=4\end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多个解?

3. 已知线性方程组

(1) $\begin{cases}x_1+x_4=1\\x_2-2x_4=2\\x_3+x_4=-1\end{cases}$ 和 (2) $\begin{cases}-2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1\\x_1+x_2-x_3+bx_4=4\\3x_1+x_2+x_3+2x_4=c\end{cases}$ 同解,求 a,b,c 的值.

4. 证明:若 $m<n$ 时,m 个方程 n 个未知数的线性方程组(不一定是齐次)有解,则一定有无穷多解.

5. 证明:线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2=a_1\\x_2+2x_3=a_2\\x_3+2x_4=a_3\\x_1+3x_2+x_3-2x_4=a_4\end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1+a_2=a_3+a_4$.

6. 证明:线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_3+4x_4=a_1+2a_3\\2x_1+2x_2+4x_3+8x_4=a_2+2a_1\\-x_1-2x_2+x_3+2x_4=a_3-a_1-a_2\\2x_1+7x_3+14x_4=3a_1+a_2+2a_3-a_4\end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1+a_2-a_3-a_4=0$.

7. 证明:线性方程组

$\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\x_2-x_3=a_2\\x_3-x_4=a_3\\x_4-x_5=a_4\\x_5-x_1=a_5\end{cases}$ 有解的充分必要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$.

8.线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2+ax_3=2 \\ -x_1+2x_2+x_3=b \end{cases}$$

证明:当 $a\neq 7$ 时,无论 b 取何值,方程组有唯一解;当 $a=7$ 且 $b=-1$ 时,方程组有无穷多组解.