目　录

第 1 章　自然数与整数 …… 1

1.1　自然数的含义 …… 2
1.2　自然数的运算 …… 12
1.3　整数 …… 28
练习一 …… 33

第 2 章　整数的性质 …… 35

2.1　整除性 …… 36
2.2　奇数与偶数 …… 40
2.3　约数与倍数 …… 43
2.4　质数与合数 …… 48
2.5　同余性 …… 54
练习二 …… 62

第 3 章　分数与小数 …… 63

3.1　分数 …… 64
3.2　小数 …… 73
3.3　百分数 …… 82
3.4　数系扩充 …… 86
练习三 …… 92

第 4 章　方程与比例 …… 94

4.1　方程 …… 95
4.2　算术与代数 …… 105

4.3 比与比例 …… 110
4.4 函数与数列 …… 116
练习四 …… 124

第5章 图形与几何 …… 126

5.1 线段与角 …… 127
5.2 四边形 …… 134
5.3 三角形 …… 142
5.4 圆与球 …… 150
5.5 长方体、圆柱和圆锥 …… 157
5.6 初等几何变换 …… 169
练习五 …… 176

第6章 统计与概率 …… 180

6.1 统计的基本概念 …… 181
6.2 统计图表 …… 186
6.3 统计量 …… 193
6.4 数据分析 …… 202
6.5 概率 …… 210
练习六 …… 221

第7章 数学基本思想 …… 223

7.1 数学基本思想概述 …… 224
7.2 小学数学的抽象思想 …… 229
7.3 小学数学的推理思想 …… 238
7.4 小学数学的模型思想 …… 241
7.5 小学数学的单位思想 …… 247
练习七 …… 255

参考文献 …… 256

第1章　自然数与整数

◉情境引入

在“乘法分配律”的新授课上，教师让学生从一个等式 $(4+2)\times25=4\times25+2\times25$ 出发，得到“两个数的和与一个数相乘，可以先把它们与这个数分别相乘，再把乘积相加”，并把这个规律叫作乘法分配律。这时有学生问道：“老师，我们仅从一个算式出发，就得到了乘法分配律，乘法分配律正确吗？怎么能说明它一定正确呢？”

面对突如其来的问题，授课教师愣住了，不知道如何解决。学生的疑问很有道理，用不完全归纳法得到的结论不一定是正确的。怎么能说明乘法分配律是正确的呢？也就是说，在小学阶段怎么证明乘法分配律呢？乘法分配律的价值到底在哪里？小学数学中哪些地方会用到它？

类似的问题还有很多。加、减、乘、除的具体含义是什么？负整数是怎么来的？自然数是怎么扩充到整数的？本章先讲述自然数的含义与运算，介绍计数方法与读数方法、四则运算的含义与运算律。然后，展开对负整数本质、整数意义与运算等问题的讨论与研究。相信读者在认真阅读本章以后，对上述问题会得到一个比较满意的回答。

1.1　自然数的含义

◉学习目标

1. 了解自然数的产生过程，理解自然数的基数理论与序数理论；
2. 理解十进制计数法，并能准确利用十进制计数法进行计数和读数；
3. 了解十进制计数法的发展过程和 k 进制计数法的计数原理。

1.1.1　自然数的产生

许多动物都具有分辨多与少的本能。一只老虎面对一匹狼和一群狼的反应是不一样的；一只野狗和一群野狗面对一根骨头的反应也是不一样的。人类同其他许多动物一样，在蒙昧时代就具有辨别事物多少的能力。这就是原始的“数感”，后来逐渐发展成数概念。

拓展阅读 鸽子的数感①

据合众国际社报道，近日新西兰奥塔哥大学的科学家称，鸽子在数感方面的能力完全可以与灵长类动物相媲美，它们能将杂乱无章的数字有序化。

研究发现，鸽子可以成功地将 9 幅图像数字由小到大进行排列，而到目前为止，只有人类与猩猩等灵长类动物才具备这种抽象思维能力。

首席专家达米·斯考夫（Damian Scarf）称：“人类计数经历了一个长期进化的过程，而动物的大脑结构与人类完全不相同，鸽子能够掌握数理能力的机理还有待进一步研究。”

数的产生源于人类社会生产生活实践的需要。远古人类在狩猎、采集等社会生活中就注意到一只羊与一群羊、一个果子与一堆果子的区别，通过比较，逐渐意识到一只羊、一个山果、一棵树等之间存在着共同的数量属性，这就是单位性，它构成了数量的基本单位。

同样，人类会注意到一双手、一对小鸟、两条鱼、两个石子等之间可以一一对应，且由两个基本单位构成，即存在数量上的共同属性。以此类推，逐渐

① http://www.epchina.com/2011/1226/28817.

抽象出事物的这一数量属性，人们便形成了数概念。当数概念越来越清晰时，人们便用语言、符号表示这些结果，即记数。

数的原始本质在于表达多与少①。早期的数是自然数，它通常表示自然界中物体的个数，是“数数（shǔshù）”数出来的。所谓数数，是指通过某种方式或途径计算详细的数目，通常采用扳手指、嘴巴念叨或心里默念等方式，是较普通的一种数学行为。

数数具有三个特点：

①结果唯一性，数事物的多少时，只要每个事物都数到，并且只数一次，那么数的结果总是唯一的。

②可替代性，数事物时，可以用其他事物代替要数的事物，然后再进行数数，数的结果不变。

③后续性，数数的时候，总是加一加一地数，后面一个数比前一个数大一，数出的最后一个数，就是数出的结果。但是数的过程是无限的，如果再有要数的事物，还可以不断地数下去。也就是说，要数的事物可以无限地数下去。因此，自然数有无限多个。

由数数产生的自然数，是人们日常生活中使用最多的数。它既可以清点物体数目，也可以编排物体的顺序。因此，自然数有两重属性。

基数属性，表示一个集合一共有几个元素，即表示元素的总个数。比如，用 3 表示集合 $\{a, b, c\}$ 有 3 个元素。

序数属性，表示某个元素的顺序，在第几个的位置上。比如，2011 年 TIMSS 数学教育评价优秀率前 5 名的国家和地区是：新加坡（43%）、韩国（39%）、中国香港（37%）、中国台湾（34%）、日本（30%）。那么中国香港的优秀率名列第 3 名。这里的“3”就是序数。

这两个属性彼此沟通，反映了离散事物的记数特征。

概念辨析 “数”与“数字”

数，是表示物体数量大小多少和先后顺序与序列的符号。数是一个用作计数、标记或量度的抽象概念，是比较同质或同属性事物的等级的简单符号记录形式（或称度量）。在日常生活中，数通常出现在标记（如公路、电话和门牌号码）、序列的指标（序列号）和国际标准书号（ISBN）上。在数学里，数的定

① 史宁中教授说，“数量的本质应当是多与少”。参见：史宁中．数学思想概论（第 1 辑）——数量与数量关系的抽象［M］．长春：东北师范大学出版社，2008.

义延伸至包含如分数、负数、无理数、超越数及复数等抽象化的概念。

数字，是一种用来表示数的书写符号或者文字，代表数的一系列符号。数字、运算符号等统称为记数系统。不同的记数系统可以使用相同的数字。比如，十进制和二进制都会用到数字“0”和“1”。同一个数在不同的记数系统中有不同的表示。比如，数 37（阿拉伯数字十进制）可以有多种写法：中文数字写作三十七，罗马数字写作 XXXⅦ，阿拉伯数字二进制写作 100101。

1.1.2 自然数的基数理论

自然数的基数理论是建立在集合论的基础之上的。集合论的创始人格奥尔格·康托（1845—1918）指出：如果一个集合能够和它的真子集建立等价关系，那么这个集合就是无限集。

比如，实数集 **R** 和其真子集（－1，＋1）可以建立“一一对应”的关系

（－1，＋1）$\underset{g=\frac{2}{\pi}\arctan x}{\overset{f=\tan\frac{\pi x}{2}}{\rightleftharpoons}}$**R**，所以实数集 **R** 是无限集。

反之，不能与其任意真子集建立“一一对应”关系的集合就是有限集。比如，{甲，乙，丙，丁}、{△，□，○} 等就是有限集。

表示集合中元素个数的数叫作基数。有限集合的基数叫作自然数。比如，$M=\{a,b,c\}$ 是一个集合，凡是能和 M 构成一一对应的集合，如 $N=\{1,2,3\}$、3 个人组成的集合、3 只羊构成的集合，都认为它们是等价的一类。它们具有相同的基数（即元素个数相同），我们用自然数 3 表示这个基数。以此类推，集合 $P=\{a\}$ 的基数是 1，集合 $Q=\{a,b\}$ 的基数是 2，空集 $\phi=\{\}$ 的基数是 0。

拓展阅读 自然数体系

著名数学家、计算机之父约翰·冯·诺依曼（John Von Neumann，1903—1957）曾经用集合语言简约、清晰地构造出自然数体系。具体步骤如下：

第一个是空集 ϕ（表示 0）；

第二个是以空集为元素的集合 $\{\}$，即 $\{0\}$（表示 1）；

第三个是以 ϕ 和 $\{\}$ 为元素的集合 $\{\phi,\{\}\}$，即 $\{0,1\}$（表示 2）；

第四个是以前三个集合为元素的集合 $\{\phi,\{\},\{\phi,\{\}\}\}$，即 $\{0,1,2\}$

（表示 3）；

……

第 n 个集合是以前 $n-1$ 个集合为元素的集合，即 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, n-1\}$（表示 n）。

如何比较自然数 a 与 b 的大小呢？根据自然数的基数理论，设 a 与 b 分别是集合 A 与 B 的基数，如果 A 与 B 能够建立一一对应关系，那么 $a=b$；如果 A 与 B 的真子集能够建立一一对应关系，那么 $a<b$；如果 A 的真子集与 B 能够建立一一对应关系，那么 $a>b$。

1.1.3　自然数的序数理论

1889 年，意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932）在《算术原理新方法》中用公理化的方法从顺序的角度揭示了自然数的意义，被称为自然数的序数理论，或称为自然数的皮亚诺公理①。

如果一个集合 N 的元素间有一个基本的关系——后继（用 $^+$ 表示），并满足下列四条公理：

（1）$1 \in \mathbf{N}$，对任意 $a \in \mathbf{N}$，$a^+ \neq 1$；

（2）任何 $a \in \mathbf{N}$，有唯一的后继 a^+（即 $a=b \Rightarrow a^+=b^+$）；

（3）除 1 以外的任何元素，只能是一个元素的后继（$a^+=b^+ \Rightarrow a=b$）；

（4）若 $M \subseteq N$，且①$1 \in M$，②$a \in M \Rightarrow a^+ \in M$，那么 $M=N$。

那么集合 N 的元素，就叫作自然数②。

皮亚诺公理完整地刻画了自然数序列：

（1）说明了 1 是第一个自然数；

（2）说明了任何一个自然数的后继唯一确定，即 $1^+=2$，$2^+=3$，……；

（3）说明了后继唯一确定前一个数，自然数中没有两个相等的数，比如，……，5 是 4 的后继，4 是 3 的后继，3 是 2 的后继，2 是 1 的后继；

（4）说明了自然数的个数是无限多，自然数的集合是无限集。因此，皮亚

① 按照皮亚诺最初的记法，自然数从 1 开始，不包含 0。如果认为 0 是第一个自然数，需要把公理系统中的 1 换成 0。

② 看到自然数的皮亚诺公理，不禁想起课文《愚公移山》中的一段话，“北山愚公长息曰：汝心之固，固不可彻，曾不若孀妻弱子。虽我之死，有子存焉；子又生孙，孙又生子；子又有子，子又有孙；子子孙孙无穷匮也”，它也蕴含了这种思想。

诺公理又被称为归纳公理，是数学归纳法的基础。

例 1 用数学归纳法证明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$（其中，$n\geqslant 1$）。

证明 当 $n=1$ 时，$1^2=1=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$，说明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

假设当 $n=k$（$k\geqslant 1$）时，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立，有 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$。

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{(k+1)}{6}[6(k+1)]\\&=\frac{(k+1)}{6}(2k^2+k+6k+6)\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

由此可知，当 $n=k+1$ 时，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

综合上述，对于一切 $n\geqslant 1$ 的自然数，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$成立。

根据皮亚诺公理，我们容易发现：自然数的本质是对单位 1 作后继运算的复合，即 1 是构成自然数的单位，前一个数作一次后继得到后一个数。由此决定了自然数的特征：后面一个数比前一个数大 1；前一个数比后一个数小 1。

以皮亚诺公理为基础，可以对自然数的加法进行归纳定义：（1）设 $a\in\mathbf{N}$，则 $a+1=a^+$；（2）设 a、$b\in\mathbf{N}$，则 $a+b^+=(a+b)^+$。其中 a 和 b 叫作加数，$a+b$ 叫作它们的和。

例 2 计算 $3+8$。

解 先求 $3+1$，易知 $3+1=3^+=4$；

再求 $3+2$，$3+2=3+1^+=(3+1)^+=4^+=5$；

再求 $3+3$，$3+3=3+2^{+}=(3+2)^{+}=5^{+}=6$；

再求 $3+4$，$3+4=3+3^{+}=(3+3)^{+}=6^{+}=7$；

……

最后求 $3+8$，$3+8=3+7^{+}=(3+7)^{+}=10^{+}=11$。

以皮亚诺公理为基础，可以对自然数的乘法进行归纳定义：（1）设 $a\in\mathbf{N}$，则 $a\times1=a$；（2）设 a、$b\in\mathbf{N}$，则 $a\times b^{+}=a\times b+a$。其中 a 叫作被乘数，b 叫作乘数，$a\times b$（或记作 $a\cdot b$、ab）叫作它们的积。

例 3　计算 3×8。

解　先求 3×1，易知 $3\times1=3$；

再求 3×2，$3\times2=3\times1^{+}=3\times1+3=3+3=6$；

再求 3×3，$3\times3=3\times2^{+}=3\times2+3=6+3=9$；

……

最后求 3×8，$3\times8=3\times7^{+}=3\times7+3=21+3=24$。

从上述归纳定义和例子我们可以发现：自然数加法的本质就是数数，$a+b$ 就是在 a 的后面连续数 b 个数，最后那个数就是 $a+b$ 的和；自然数乘法的本质就是连加，$a\times b$ 就是将被乘数 a 连加 b 次，最后的结果就是 $a\times b$ 的积。

在序数理论下，如何定义自然数的大小呢？皮亚诺公理中的后继关系，指明了相邻自然数的大小关系。根据自然数的加法，可以定义任意两个自然数的大小关系。如果 a、$b\in\mathbf{N}$，存在 $k\in\mathbf{N}$，使得 $a+k=b$，那么称 a 小于 b，记作 $a<b$，也称 b 大于 a，记作 $b>a$。

1.1.4　计数与读数

1. 计数

记数的发展也经历了由繁到简的漫长历史过程，经历了手指记数、石子记数、结绳记数等实物记数阶段，逐渐过渡到符号记数阶段。迄今发现最早的刻痕记数，是三万多年前的狼骨刻痕。到了迄今五千多年前，用书写专用符号来表示数字，就是人类社会早期的正式记数。

但是，早期的记数方式是用一个符号表示一个数，要表示很多数就需要很多符号，使用起来不太方便。后来，人们便用有限的符号，按照一定顺序加上排列规则来表示很多的数，这就是计数（注意：计数与记数是两个不同概念）。计数的方法很多，目前常用的有十进制计数法和六十进制计数法等。下面，我们来看看十进制计数法的发展过程。

第一阶段，创造数字符号，即每个数对应一个符号。比如，公元前 2400 年左右的巴比伦楔形数字，对 1～12 的每个数都对应有一个符号；古代罗马就采用 I、V、X、L、C、D、M 分别代表 1、5、10、50、100、500、1000。从理论上讲，这些数字符号所代表的计数单位是一，只能用有限的一些符号表示有限的数。

教学链接 | 1～10 的教学

小学生最早接触的数是自然数，是通过数物体个数，逐渐认识 1，2，3，…，10，具体形象地理解自然数的意义、自然数的顺序和大小。进入小学前，儿童已经有“口头数数”“按物点数”和“数后说总数”的经验，具有初步的数概念。小学阶段的认识数教学主要集中在以下几个方面。

建立实物和点子图的对应，经历“实物→点子图→数”三个基本阶段，明确计数的结果是表示一组物体的总数，而不是最后一个物体。

把每个数的音、形、义统一起来，掌握每个数的实际意义，并能正确分辨每一个数。

在计数时，能顺着数，也能倒着数，掌握数的顺序，知道后一个数比前一个数多一，前一个数比后一个数少一。

知道每一个数的组成，即每一个数中含有多少个一。比如 5 的组成，可通过小棒等实物，对 5 进行不同的分解，得到“5 由 1 和 4 组成的，5 由 2 和 3 组成的”等结论。

正确书写数字，掌握字形和书写笔顺笔画。通常可以借助儿歌帮助儿童记忆数字，“1 像铅笔能写字，2 像鸭子水中游，3 像耳朵能听话，4 像小旗迎风飘，5 像钩子能钩物，6 像哨子嘟嘟响，7 像镰刀割青草，8 像葫芦空中摇，9 像勺子盛稀饭”。

第二阶段，建立进位规则，即重复使用有限的几个数字符号按一定规则进行组合表示大量数。比如，古埃及用 | 表示 1、∩表示 10、用∩∩∩||表示 32。公元前 1600 年左右，我国的甲骨文中就有专用的符号表示“一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千”等数字，并用这些符号进行组合表示其他的数。这种计数系统的进率为十，这就是早期的“十进制计数法”。

这一阶段的计数方法，蕴含了初步的进位思想，其计数单位既有一，又有确定的数（比如五、十、十二、二十、百等），并涉及简单加减来确定数。在这一阶段，古罗马人用 I、V、X、L、C、D、M 七个数字符号按照下列规律组合起

来，就能表示任何数：（1）一个数字符号重复几次，就表示这个数的几倍，如 XXX 表示 30；（2）大数字符号右边附一个小数字符号就表示大数加小数，如 VI 表示 6；（3）大数字符号左边附一个小数字符号就表示大数减小数，如 IV 表示 4；（4）数字符号上加横线表示 1000 倍，如用 $\overline{\mathrm{XXV}}$ 表示 25000。

第三阶段，建立位值概念，即数字符号在不同的“位”表示基数不同的值，是一种比较直观的计数。人类将常见的计数单位从右到左排成一排，计数时在对应的位置上写上相应单位的个数，而不必重复记下各个单位。

公元前 500 年左右，中国出现了算筹计数，从右向左依次为个、十、百、千等计数单位，各单位之间的进率为十（即右边一位满十需向左进一，左边一位的一相当于右边一位的十），用空位表示 0，比如用“⊥　 ≡ ‖”表示“6082”。后来，我国的珠算计数也是采用这种方法。

第四阶段，建立十进制计数法，即按照“满十进一”的原则，用 0～9 这 10 个数字表示所有自然数。在中印文化交流中，古印度人认为十进制数非常重要，于是创造了 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这 9 个数字，并用空格表示 0。后来发现空格容易产生混淆，便用“·”代替空格表示 0，后来小圆点逐渐演化为小圆圈，成为今天我们使用的数字 0。0～9 这 10 个数字加上位置准则，便构成一套简洁而有效的计数系统。

“十进制计数法”在 8 世纪从印度传到阿拉伯国家，13 世纪从阿拉伯传到欧洲，被欧洲人普遍接受，并称 0～9 这 10 个数字为阿拉伯数字。“十进制计数法”的发明，对社会进步和科技创造起到了极大的推动作用，不少数学家、数学史家、哲学家对此给予了高度的评价。比如，卡尔·马克思称赞它是“人类最妙的发明之一”。

电子图书馆

[1] 史宁中，孔凡哲．“数学教师的素养”对话录［J］．人民教育，2008（21）．

[2] 曾小平，韩龙淑．十进制计数法的数学本质与教学［J］．小学教学（数学版），2011（5）．

“十进制计数法”包括“十进位”和“位值制”两条原则。

所谓“十进位”，就是满十进一，即相邻两个计数单位之间的进率为十，10 个一向十位进一，10 个十向百位进一，……；也就是说，百位上的 1 相当于 10 个十位上的 1，十位上的 1 相当于 10 个个位上的 1。

所谓“位值制”，就是同一个数字在不同数位上表示的数值不同，比如在“22”中，前一个 2 表示两个十，后一个 2 表示两个一。

拓展阅读 k 进制计数法

一般地，k 进制计数法的基本原理是：满 k 向前一位进一，前一位借一到后位当 k（见图 1.1－1）。比如，8 进制数 $542_{(8)}=5\times8^2+4\times8+2\times1=354$。

k^4	k^3	k^2	k^1	k^0	（k进制计数法）
a	b	c	d	e	（满k进一，借一当k）
$\overline{abcde}=a\times k^4+b\times k^3+c\times k^2+d\times k^1+e\times k^0$					

图 1.1－1

例　如果$52_{(k)}$是$25_{(k)}$的 2 倍，那么$123_{(k)}$化成十进制是多少？

解　由题意知 $5k+2=2(2k+5)$，解得 $k=8$。

那么$123_{(k)}=123_{(8)}=1\times8^2+2\times8+3=83$。

有时候会遇到不同进位制之间的转换，基本的思路是：先转化为十进制数，再看它包含的进位制的最高次数的个数，首先确定最高位的数；再依次确定后面的数；当中间不足位时，补零占位。

2. 命数

按照十进制计数法，我国是按“四位一级”给自然数命名的，具体如下：

①自然数的前十个数给予单独的名称，即〇、一、二、三、四、五、六、七、八、九，对应的大写为零、壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖，对应的阿拉伯数字为 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9。

②按照“满十进一”的原则规定计数单位，十个一叫作十，十个十叫作百，十个百叫作千，十个千叫作万，十个万叫作十万，十个十万叫作百万，十个百万叫作千万，十个千万叫作亿，十个亿叫作十亿，依次为百亿、千亿、兆，……。十、百、千、万、亿的大写分别为拾、佰、仟、万、亿。其中，个、十、百、千为个级；万、十万、百万、千万为万级；之后依次为亿级；……。

③其他自然数的命名，由前十个数和计数单位组合而成。写数的时候，各计数单位对应写上数字。比如，一个自然数由三个千万、两个十万、九个千、三个百、四个一构成，写作：30209304，读作：三千零二十万九千三百零四。如果一个自然数由四个千亿三个亿三个百构成，写作：400300000300，读作：四千零三亿零三百。数位分级与计数见表 1.1－1。

表 1.1－1　数位分级与计数

级名			亿级				万级				个级			
计数单位	…	兆	千亿	百亿	十亿	亿	千万	百万	十万	万	千	百	十	个
	…						3	0	2	0	9	3	0	4
			4	0	0	3	0	0	0	0	0	3	0	0

教学链接 十进制计数法的教学

在小学数学中，计数单位是随着认识数的范围扩大而逐渐出现的。教学需要经历以下几个过程：

（1）借助计数工具（计数器、小棒和方块等），让学生学会十个十个地数、百个百个地数，……，在此过程中领悟十个一是一个十、十个十是一个百、十个百是一个千，……，逐渐领悟十、百、千、万等计数单位；

（2）练习数数，从 89 数到 110，先借助计数工具数，再逐渐脱离计数工具数，体会计数单位百的含义；

（3）数更大的数，从 890 数到 1100，先借助方块（也可以画方块）数数，再逐渐脱离方块数数，体会计数单位千的含义；

（4）在理解多位数含义的基础上，理解相邻计数单位的进率是十，这样的计数方法就是十进制计数法。

3. 读数

按照我国的传统习惯，我们这样读数。

（1）不含 0 的数。

从低位到高位进行四位分级，然后从高位起，顺次读出各级里的数和它们的级名。例如，38524 读作：三万八千五百二十四，1459647531 读作：十四亿五千九百六十四万七千五百三十一。

（2）含有 0 的数。

从低位到高位进行四位分级，然后从高位起，顺次读出各级里的数和它们的级名，每一级中间的 0 只读一次，每一级末尾的 0 不读。例如，3500 读作：三千五百，403010 读作：四十万三千零一十，80307001 读作：八千零三十万七千零一，5040030500 读作：五十亿四千零三万零五百。

电子图书馆

[1] 石国宁. 孙大圣的金箍棒：自然数1 [M] //赵之，黄天祥. 科学夜谭. 北京：中国青年出版社，1988：63－64.

[2] 薛吉辰. 有趣的数字"七"[J]. 知识就是力量，2006（9）.

[3] 谈祥柏. 无处不在的5 [J]. 天下之奇，1982（1）.

1.2 自然数的运算

◉学习目标

1. 掌握自然数四则运算的含义、运算性质和运算方法；
2. 理解四则运算之间的关系和运算顺序；
3. 了解带余除法的含义和运算符号的起源。

1.2.1 加法

1. 定义

有限集合 A 的基数为自然数 a，有限集合 B 的基数为自然数 b，且 $A\cap B=\phi$，集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$ 的基数为 c，那么 c 叫作 a 与 b 的和。记作：$a+b=c$；读作：a 加 b 等于 c；其中，a 与 b 叫作加数，c 叫作和，符号"+"叫作加号。

比如，自然数3代表集合 $A=\{a, b, c\}$ 的基数，自然数2代表集合 $B=\{d, e\}$ 的基数，其中 a，b，c，d，e 互不相同。$3+2$ 代表 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$ 的基数，因为集合 $\{a, b, c, d, e\}$ 的基数为5，所以 $3+2=5$。

通俗地说，求两个数和的运算叫作加法。有时候，我们也说，把两个数合并成一个数的运算叫作加法。

教学链接 | 加法的意义

在小学数学里，将加法定义为把两个数（有时也指多个数）合并成一个数的数学运算，其含义是合并和求和。加法的基本意义是表示聚合，并由聚合延伸出比较。

①聚合

例如，小明有 5 颗玻璃珠，小强有 4 颗玻璃珠，小明和小强一共有几颗玻璃珠？

②比较

例如，小明有 5 颗玻璃珠，小强比小明多 4 颗玻璃珠，小强有几颗玻璃珠？

---

2. 运算性质

加法交换律　两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变。即 $a+b=b+a$。

加法结合律　三个数相加，先把前两个数相加，再加第三个数，或者先把后两个数相加，再加第一个数，它们的结果不变。即 $(a+b)+c=a+(b+c)$。

拓展 1　若干个数相加，任意交换加数的位置，或者先把其中任意几个加数作为一组加起来，再与其他加数相加，它们的和不变。

拓展 2　若干个数的和加若干个数的和，可以先把第一个和中的数分别加第二个和中的数，再把所得的和加起来。就是 $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$。

和不变的性质　两个数相加，其中一个加数加上某个数，另一个加数减去相应的数，和仍然不变。用数学语言表示是：若 $a+b=c$，那么 $(a \pm m)+(b \mp m)=c$。

在小学阶段，我们也可以直观地理解加法交换律和加法结合律。如图 1.2－1 所示，第一排的 5 个石子，从左向右数，就是 $3+2=5$；而从右向左数，就是 $2+3=5$，可见，最终结果与数数顺序无关，因而得到 $3+2=2+3$。再如，第二排石子，从左往右数就是 $3+2+1=6$，从右往左数就是 $1+2+3=6$，可见 $(3+2)+1=3+(2+1)$，这就是加法结合律。

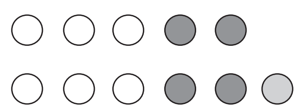

图 1.2－1

如果把“和不变的性质”作为基础，可以证明加法交换律和结合律。比如，要证明 $15+12=12+15$，根据和不变的性质，有 $15+12=(15-3)+(12+3)=12+15$。对于结合律，$(a+b)+c=a+(b+c)$，只需要把 $(a+b)$ 和 c 看作两个数，那么根据“和不变的性质”，有 $(a+b)+c=(a+b-b)+(b+c)=a+(b+c)$。

更为重要的是，在进行加法运算时，使用“和不变的性质”先凑整再计算，可以使加法运算更加简便。比如，下列计算：

$$
\begin{aligned}
&235+189\\
&=(235-11)+(189+11)\\
&=224+200\\
&=424\text{。}
\end{aligned}
$$

3. 运算方法

（1）表内加法。

加法就是数数，而且顺着数数。比如，3 +2 就是在 3 的基础上再数两个数 4、5，得到 3 +2 =5。当然也可以在 2 的基础上数三个数 3、4、5；还可以合并起来，先数 3 个再数 2 个，即 1、2、3、4、5，得到 3 +2 =5。

把几加几的结果整理成表和口诀，就成为加法表和加法口诀（见图 1. 2 -2），它和乘法口诀一样，是进行运算的基本结论和工具。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1+1=2								
2	2+1=3	2+2=4							
3	3+1=4	3+2=5	3+3=6						
4	4+1=5	4+2=6	4+3=7	4+4=8					
5	5+1=6	5+2=7	5+3=8	5+4=9	5+5=10				
6	6+1=7	6+2=8	6+3=9	6+4=10	6+5=11	6+6=12			
7	7+1=8	7+2=9	7+3=10	7+4=11	7+5=12	7+6=13	7+7=14		
8	8+1=9	8+2=10	8+3=11	8+4=12	8+5=13	8+6=14	8+7=15	8+8=16	
9	9+1=10	9+2=11	9+3=12	9+4=13	9+5=14	9+6=15	9+7=16	9+8=17	9+9=18

图 1. 2 -2　加法口诀表

通常，数学上将加法口诀表中包含的加法称作表内加法。比如，要计算 5 +9，可以根据加法交换律，得到 5 +9 =9 +5，再根据加法口诀表中的 9 +5 =14，就得到 5 +9 =14。

（2）表外加法。

数学上，把不在加法口诀表之内的自然数加法叫作表外加法，主要是指多位数加多位数（含一位数）。对于这类加法，通常把两个加数写成十进制和的形式，按照拓展性质 2，转化为一位数加一位数进行运算。

当两个加数的同位数字相加不超过 10 时，其结果是同位数字上的数分别相加的结果。

当两个加数的同位数字相加超过 10 时，要遵守“满十进一”的原则，结果

向前进位（前一位相当于加上一），而把余下的数字作为同位数字相加的结果。这类加法叫作进位加法。比如：

$$
\begin{aligned}
&4325+678\\
&=(4\times10^3+3\times10^2+2\times10^1+5)+(6\times10^2+7\times10^1+8)\\
&=4\times10^3+(3+6)\times10^2+(2+7)\times10^1+(5+8)\\
&=4\times10^3+9\times10^2+9\times10^1+13\\
&=4\times10^3+9\times10^2+(9+1)\times10^1+3\\
&=4\times10^3+9\times10^2+10\times10^1+3\\
&=4\times10^3+(9+1)\times10^2+0\times10^1+3\\
&=4\times10^3+10\times10^2+0\times10^1+3\\
&=(4+1)\times10^3+0\times10^2+0\times10^1+3\\
&=5003。
\end{aligned}
$$

用竖式书写是：

$$
\begin{array}{r}
4\ 3\ 2\ 5\\
+\ {}_1 6\,{}_1 7\,{}_1 8\\
\hline
5\ 0\ 0\ 3
\end{array}
$$

1.2.2　减法

1. 定义

设有两个集合 A、B，且满足 $B\subseteq A$，其中集合 A 的基数为自然数 a，集合 B 的基数为自然数 b，集合 A 与 B 的差集的基数定义为 $a-b$。也就是说，自然数 a 与 b 相减的差 $a-b$，是指 a 与 b 代表的集合 A 与 B 的差集 $A-B$ 的基数。

比如，自然数 3 代表集合 $A=\{a, b, c\}$ 的基数，自然数 2 代表集合 $B=\{a, b\}$ 的基数，$3-2$ 表示 $A-B=\{c\}$ 的基数，因为集合 $\{c\}$ 的基数为 1，所以 $3-2=1$。

在数学上，一般借助加法来定义减法。已知两个数 a 和 b，求一个数 c，使得 c 与 b 的和等于 a，这种运算叫作减法。记作：$a-b=c$；读作：a 减 b 等于 c。其中，a 叫作被减数，b 叫作减数，c 叫作 a 与 b 的差，符号“$-$”叫作减号。

教学链接 | 减法的意义

在小学数学里，将减法定义为从一个大数中去掉一个小数而剩下的数的数学运算，其含义是相减和求差。减法的基本意义是分离，并由分离延伸出比较。

①分离

例如，小强有 6 颗玻璃珠，他给了小明 4 颗，还剩下几颗？

②比较

比较有两种情形。一种是二者已知，求比较结果是多少。比如，小强有 9 颗玻璃珠，小明有 5 颗玻璃珠，小强比小明多几颗玻璃珠？另一种是，已知其中之一和比较结果，求另一个量。比如，小强有 9 颗玻璃珠，小明比他少 4 颗，小明有几颗玻璃珠？

需要说明的是，在自然数范围内，减法不一定总可以进行，也就是差不一定存在。比如，在自然数范围内，$3-5$ 就不能进行。但是，如果差存在，那么差一定唯一。也就是，如果 $a-b=x$，且 $a-b=y$，那么 $x=y$。下面证明这个结论。

证明 如果 $x\neq y$，那么必有 $x>y$ 或者 $x<y$ 之一成立。不妨设 $x>y$，那么必然存在 $\Delta>0$，使得 $x=y+\Delta$。

由减法的定义，$a=b+x$，且 $a=b+y$，由 $a=b+x=b+(y+\Delta)=b+y+\Delta=a+\Delta$。根据自然数的含义，$a=a+\Delta$ 是不可能成立的。

由减法的定义，可以得到下面两个推论：

推论 1 某数减去一个数，再加上同一个数，仍得原数。就是 $(a-b)+b=a$。

证明 设 $a-b=c$，那么 $b+c=a$。于是 $(a-b)+b=c+b=b+c=a$。

推论 2 某数加上一个数，再减去同一个数，仍得原数。就是 $(a+b)-b=a$。

证明 设 $a+b=c$，那么 $c-b=a$。于是 $(a+b)-b=c-b=a$。

2. 运算性质

性质 1 一个数减去两个数的和，等于从这个数中依次减去和里的每一个加数。即 $a-(b+c)=a-b-c$。

性质 2 一个数减去两个数的差，等于这个数先加上差里的减数，再减去差里的被减数，或者等于先减去差里的被减数，再加上差里的减数。即 $a-(b-c)=a+c-b=a-b+c$。

性质 3 若干个数的和减去若干个数的和，等于第一个和中的各个加数，分别减去第二个和中的加数，再把所得的差加起来。即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)$。

差不变的性质 被减数和减数同时加上或减去一个数，其差不变。即若 $a-b=c$，那么 $(a\pm m)-(b\pm m)=c$。

如果把“差不变的性质”作为基础，可以推导“去括号”法则。比如，要计算 $a-(b-c)$，可以在被减数和减数同时加上 c，得到 $a+c-(b-c+c)=a+c-b=a-b+c$。

类似地，读者可以推导 $a+(b-c)=a+b-c$。

此外，我们在进行减法的简便运算时，常常使用差不变的性质先凑整再计算。比如，计算 $235-189=(235+11)-(189+11)=246-200=46$。再如，计算 $456-205=(456-5)-(205-5)=451-200=251$。

3. 运算方法

（1）表内减法。

计算减法最初级的方法是“倒着数数”。比如，要计算 $8-3$，就向 8 前面数 3 个数，依次为 7、6、5，结果就是 5，因此 $8-3=5$。

但在数学上是根据加法口诀表来计算表内减法的，所以这类减法又称为表内减法。比如，要计算 $8-5$，可以根据加法口诀表中的口诀“$5+3=8$”，得出 $8-5=3$。再如，要计算 $15-8$，可以根据口诀“$8+7=15$”，得出 $15-8=7$。

（2）表外减法。

当数字很大时，我们一个一个地数数，需要花很长时间，也不可能用加法口诀表进行计算。于是人们便发明了笔算减法，其本质是十进制计数法的“位值原理”。

当减数同数位上的数字小于或等于被减数时，其差是同位数字上的数分别相减的结果。

当减数同位上的数大于被减数的数时，要遵守“借一当十”的原则向前借位（前一位相当于减去一，后一位相当于加上十），而把余下的数作为同位数字相加的结果。这种减法被称为退位减法。比如：

$$\begin{aligned}&35-18\\=&(3\times10+5)-(1\times10+8)\\=&(3-1)\times10+5-8\\=&(3-1-1)\times10+(10+5-8)\\=&1\times10+(15-8)\\=&1\times10+7\\=&17。\end{aligned}$$

用竖式书写是

$$\begin{array}{r}3\ 5\\-\ 1\ 8\\\hline1\ 7\end{array}$$

读者可以仿照上述方式，进行三位数以及更多位数的减法的计算原理的推导。读者也不难发现，退位减法比不退位减法要难很多，这正是学生在学习退位减法时常出现问题的原因之一。

电子图书馆

王海娇，郜舒竹．加、减竖式如何教［J］．教学月刊（小学版·数学），2012（3）．

1.2.3　乘法

1. 定义

集合 A 与集合 B 的笛卡儿集（$A\times B$）定义为 $A\times B=\{(a, b) \mid a\in A, b\in B\}$。也就是说，从集合 A 与 B 中各取出一个元素，构成有序数对（a，b），$A\times B$就是有序数对构成的集合。

例如，集合 $A=\{a, b, c\}$ 与集合 $B=\{x, y\}$ 构成的笛卡儿集 $A\times B=\{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$。注意到集合 A、B、$A\times B$的基数分别为3、2、6，因此，定义 $3\times2=6$。

一般地，自然数 a 乘自然数 b 的结果 $a\times b$ 是指基数为 a 的集合 A 和基数为 b 的集合 B 构成的笛卡儿集 $A\times B$ 的基数。在集合 A 与 B 为有限集的情况下，$A\times B$也为有限集。这也就是说，两个自然数的乘积仍为自然数。

一般情况下，我们用加法来定义自然数的乘法。b 个相同加数 a 的和 c 叫作 a 与 b 的积。就是 $c=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b\text{个}a\text{相加}}$。求两个数积的运算叫作乘法，记作：$a\times b=c$，读作：$a$ 乘 b 等于 c①。其中，a 叫作被乘数，b 叫作乘数，c 叫作积，符号“×”叫作乘号。乘号“×”有时写作“·”，在不引起混淆的情况下，可以省略不写。

教学链接｜乘法的意义

乘法的意义是小学数学的重要知识点。学生通过实物和图片列出 $2+2+2+2+2=10$、$3+3+3+3+3+3=18$ 等算式，明确这些算式都是相同加数自身连加，式子比较长，为了便于书写，这两个算式简写成 $2\times5=10$ 和 $3\times6=18$。进而理解“×”的意义，并且乘号前面的数是加数，乘号后面的数表示加数的个

① 有时补充规定：$a\times1=a$，$a\times0=0$。

数，两种算式的运算结果相同。

初步认识乘法时，需要进行乘法算式与加法算式的相互转化。然而，对于 $4+4+6+2$ 能否用乘法表示，这类问题并没有统一答案，只要言之有理即可。小学生可能会回答“不能，因为加数不同”；也可能会回答“可以，把 $6+2$ 转化为 $4+4$，原算式可以用乘法算式 4×4 表示”。这两种回答都有道理，都算正确。

由乘法的定义可知，乘法的本质是相同加数的自身连加。因为在自然数范围内，加法是封闭的，结果是唯一的。所以，在自然数范围内，乘法是封闭的，结果也是唯一的。

2. 运算性质

交换律　两个数相乘，交换乘数的位置，乘积不变。即 $a\times b=b\times a$。

证明　设 $A=\{x_1, x_2, \cdots, x_a\}$和 $B=\{y_1, y_2, \cdots, y_b\}$，那么有

$$A\times B=\left\{\begin{array}{l}(x_1, y_1), (x_1, y_2), \cdots, (x_1, y_b)\\(x_2, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_2, y_b)\\\cdots\\(x_a, y_1), (x_a, y_2), \cdots, (x_a, y_b)\end{array}\right\},$$

$$B\times A=\left\{\begin{array}{l}(y_1, x_1), (y_1, x_2), \cdots, (y_1, x_a)\\(y_2, x_1), (y_2, x_2), \cdots, (y_2, x_a)\\\cdots\\(y_b, x_1), (y_b, x_2), \cdots, (y_b, x_a)\end{array}\right\}。$$

上述两个集合的元素个数相等，那么 $\|A\times B\|=\|B\times A\|$，进而有 $a\times b=b\times a$。

结合律　三个数相乘，先把前两个数相乘，再与第三个数相乘，或者先把后两个数相乘，再与第一个数相乘，它们的积不变。即 $(ab)c=a(bc)$。

$a\times(b\times c)$

$=a\underbrace{(b+b+\cdots+b)}_{c\text{个}b\text{相加}}$

$=\underbrace{ab+ab+\cdots+ab}_{c\text{个}ab\text{相加}}$（注：这一步用到乘法分配律）

$=(a\times b)\times c$。

分配律　两个数的和与一个数相乘的积，等于和里的每一个加数与这个数相乘，再把所得的积加起来。即 $(a+b)c=ac+bc$。

证明　$(a+b)\times c$

$$=\underbrace{(a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b)}_{c\text{个}(a+b)\text{相加}}$$
$$=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{c\text{个}a\text{相加}}+\underbrace{b+b+\cdots+b}_{c\text{个}b\text{相加}}$$
$$=a\times c+b\times c。$$

乘法分配律的另一形式是：两个数的差与一个数相乘的积，等于被减数与减数分别与这个数相乘，再把所得的积相减。即 $(a-b)c=ac-bc$。

拓展 1 若干个数的和与一个数相乘的积，等于和中的每一个加数与这个数相乘，再把所得的积加起来。即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\times b=a_1\times b+a_2\times b+\cdots+a_n\times b。$$

拓展 2 若干个数的和与若干个数的和相乘，等于第一个和里的每一个加数与第二个和里的每一个加数相乘，再把所得的积加起来。即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\times\sum_{j=1}^{m}b_j=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i}^{n}a_i)b_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a_ib_j)。$$

积不变的性质 两个数相乘，其中一个乘数扩大某个倍数，另一个乘数缩小相同倍数，乘积不变。即：若 $a\times b=c$，那么 $(a\times m)\times(b\div m)=c$。

如果以“积不变的性质”为基础，可以证明乘法交换律和结合律（请读者自行完成）。此外，我们在进行乘法的简便运算时，常常使用积不变的性质先凑整再计算。

比如，计算 125×32，因为 $125\times8=1000$，故需将 125 扩大 8 倍变为 1000，相应地，32 应该缩小 8 倍，于是 $125\times32=(125\times8)\times(32\div8)=1000\times4=4000$。

值得注意的是，“反比例”“反比例函数”和“小数乘法”的基础，就是乘法“积不变的性质”。

3. 运算方法

（1）表内乘法。

关于乘法的运算，当数字比较小时，可以借助加法来计算。比如 $4\times6=4+4+4+4+4+4=24$，用得多了，便成为口诀“四六二十四”。所有一位数乘一位数的结果，汇编成乘法口诀，就是我们通常说的“九九乘法表”（见图 1.2－3）。

1×1=1								
1×2=2	2×2=4							
1×3=3	2×3=6	3×3=9						
1×4=4	2×4=8	3×4=12	4×4=16					
1×5=5	2×5=10	3×5=15	4×5=20	5×5=25				
1×6=6	2×6=12	3×6=18	4×6=24	5×6=30	6×6=36			
1×7=7	2×7=14	3×7=21	4×7=28	5×7=35	6×7=42	7×7=49		
1×8=8	2×8=16	3×8=24	4×8=32	5×8=40	6×8=48	7×8=56	8×8=64	
1×9=9	2×9=18	3×9=27	4×9=36	5×9=45	6×9=54	7×9=63	8×9=72	9×9=81

图 1.2－3　乘法口诀表

（2）表外乘法。

①多位数乘一位数

将多位数用十进制计数法表示，转化为若干个数的和乘一位数，再根据乘法分配律计算。比如

358×6

$=(3\times100+5\times10+8)\times6$

$=3\times6\times100+5\times6\times10+8\times6$

$=18\times100+30\times10+48$

$=1800+300+48$

$=2148$。

②多位数乘整十（百、千）的数

将整十（百、千）的数用十进制计数法表示，转化为多位数乘一位数，再乘十（百、千等）。

③多位数乘多位数

将第二个乘数用十进制和表示，再利用乘法分配律转化为前两类运算来计算。比如

358×426

$=358\times(4\times10^2+2\times10+6)$

$=358\times4\times10^2+358\times2\times10+358\times6$

$=143200+7160+2148$

$=152508$。

用竖式书写是

$$\begin{array}{r} 358 \\ \times\ 426 \\ \hline 2148 \\ 716 \\ 1432 \\ \hline 152508 \end{array}$$

电子图书馆

[1] 曾小平，韩龙淑．让学生经历知识的形成过程：以“乘法分配律”的教学为例[J]．教学月刊（小学版·数学），2012（3）．

[2] 曾小平，韩龙淑．多位数乘法的算法、算理与教学［J］．小学教学（数学版），2011（10）．

[3] 郜舒竹．为何“探究不出来”：兼谈教学难点的分析方法［J］．人民教育，2009（8）．

1.2.4 除法

1. 定义

在数学上，一般借助乘法来定义除法。已知两个数 a 和 b，求一个数 q，使得 $b\times q=a$，这种运算叫作除法。记作：$a\div b=q$；读作：a 除以 b 等于 q；也可以读作：b 除 a 等于 q（注意：“除以”与“除”的含义不用）。其中，a 叫作被除数，b 叫作除数，q 叫作 a 除以 b 的商，符号“ ÷ ”叫作除号。

除法可以表示“平均分”，$a\div b=q$ 就表示“将 a 个物体平均分成 b 份，每一份为 q 个”。如果我们把乘法定义为“连加”，那么除法可以理解为“连减”。即 $a\div b=q$ 可以理解为 $a-\underbrace{b-b-\cdots-b}_{q个b}=0$。

教学链接 | **除法的意义**

小学中的除法常被分为“等分除”和“包含除”两种基本类型，其实就是除法的两种基本模型，要在学生动手分物体的基础上进行理解。

比如，等分除，“把 6 根小棒平均分给 3 个小朋友，每人分得几根?”可以用除法算式“$6\div3=2$”表示，其中结果 2 表示每人分得两根。

再如，包含除，“有 12 本书，4 本书捆成一捆，可以捆成几捆?”可以用除法算式“$12\div4=3$”表示，其中结果 3 表示可以捆成三捆。

其实，一个算式就是一个故事，借助典型的故事，有助于学生更好地理解抽象的算式。

需要说明的是，在自然数范围内，除法不一定总可以进行，也就是商不一定存在。比如，在自然数范围内，$3 \div 5$ 就不能进行。但是，如果商存在，那么商一定唯一。也就是，如果 $a \div b = x$，且 $a \div b = y$，那么 $x = y$。（证明留做练习）

由除法的定义，可以得到下面两个推论：

推论 1　某数除以一个数，再乘同一个数，仍得原数。就是 $(a \div b) \times b = a$。

证明　设 $a \div b = c$，那么 $b \times c = a$，于是 $(a \div b) \times b = c \times b = b \times c = a$。

推论 2　某数乘一个数，再除以同一个数，仍得原数。就是 $(a \times b) \div b = a$。（证明由读者自行完成）

2. 运算性质

性质 1　一个数除以两个数的积，等于这个数依次除以积里的每一个乘数。即 $a \div (b \times c) = a \div b \div c$。

性质 2　一个数除以两个数的商，等于这个数先乘商里的除数，再除以商里的被除数，或者等于先除以商里的被除数，再乘商里的除数。即 $a \div (b \div c) = a \times c \div b = a \div b \times c$。

性质 3　若干个数的和除以一个数，等于和里的每一个数除以这个数，再把所得的商加起来。[①] 即 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \div b = \sum_{i=1}^{n} (a_i \div b)$。

商不变的性质　两个数相除，被除数和除数同时扩大或者缩小相同的倍数，商仍然不变。即若 $a \div b = c$，那么 $(a \times m) \div (b \times m) = c$。

如果把“商不变的性质”作为基础，可以推导去括号法则。比如，对于 $a \div (b \div c) = (a \times c) \div (b \div c \times c) = a \times c \div b = a \div b \times c$。

此外，我们在进行除法的简便运算时，常常使用“商不变的性质”先凑整再计算。

教学链接 | 商不变的性质

“商不变的性质”在小学阶段非常重要。“分数的基本性质”“分数除法”“比的基本性质”“正比例”“正比例函数”和“小数除法”的基本原理，基础都是除法“商不变的性质”。比如，计算分数除法：

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \left(\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}\right) \div \left(\frac{d}{c} \times \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}\right) \div 1 = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}。$$

① 这条性质可以看作除法满足分配律。

3. 运算方法

（1）表内除法。

简单的除法可以根据乘法口诀表，逆用口诀来计算。比如，要计算 $8\div2$，可以根据 $2\times4=8$，得出 $8\div2=4$。再如，要计算 $15\div5$，可以根据 $3\times5=15$，得出 $15\div5=3$。这类除法，数学上叫作表内除法。

（2）表外除法。

不能逆用乘法口诀表中的口诀进行计算的除法，叫作表外除法。表外除法的被除数或者除数比较大，计算时对被除数进行分解，将除法算式转化为多个数的和除以一个数，再根据性质 3 进行计算。如果某一位不能整除，则自动向下一位转移，除到哪位，商到哪位。比如

$$
\begin{aligned}
&351\div3\\
&=(300+50+1)\div3\\
&=(300+30+21)\div3\\
&=300\div3+30\div3+21\div3\\
&=100+10+7\\
&=117。
\end{aligned}
$$

用竖式书写是

$$
\begin{array}{r}
117\\
3\overline{)351}\\
\underline{3}\\
5\\
\underline{3}\\
21\\
\underline{21}\\
0
\end{array}
$$

教学链接 | 除法试商

小学生在学习除数是两位数的除法竖式时，试商是一个比较困难的事情。一般采用“四舍五入法”进行试商，通常有以下几种情况：①除数是整十数；②除数接近整十数；③借助口算可以完成的；④商中有 0 的；⑤商的末位有 0 的。

电子图书馆

[1] 郜舒竹. 回眸历史看竖式 [J]. 教学月刊 (小学版·数学), 2013 (6).

[2] 曾小平, 韩龙淑. 除法竖式的发展与教学 [J]. 小学教学 (数学版), 2011 (11).

[3] 曾小平, 刘长红. 除法竖式: 学生为何从高位算起 [J]. 小学教学 (数学版), 2014 (3).

4. 带余除法

在做除法时，有时候得不到整数商。比如，$53 \div 8$，就没办法找到一个整数乘 8 等于 53。

但是能够找到一个整数 6，使得 $8 \times 6 = 48 < 53$，而 $8 \times (6+1) = 56 > 53$。从而，我们可以找到 $53 \div 8$ 的最大商为 6，并且 53 减去 8×6 还余下 5，就是 $53 = 8 \times 6 + 5$。

定义　已知两个自然数 a 和 b（$b \neq 0$），要求两个自然数 q 和 r，使得 $a = b \times q + r$，并且 $0 < r < b$，这样的除法运算叫作带余除法。其中，a 叫作被除数，b 叫作除数，q 叫作不完全商（简称商），r 叫作余数。一般记作：$a \div b = q$（余 r）或者 $a \div b = q \cdots\cdots r$；读作：$a$ 除以 b 等于 q 余 r。

如果允许 $r = 0$，那么此时的除法就是我们前面讲的除法（通常称为整除）。

对于带余除法，基本的结论是：商和余数存在且唯一。

教学链接 | 带余除法的教学

带余除法的教学，可以按照“实物—表象—符号—关系”的程序，让学生能较深刻地理解它的基本含义。

1. 实物

分豆子游戏：教师发给学生 7 颗豆子和 3 个盘子，让学生把豆子分到盘子里。活动要求：每个盘子分到的豆子一样多；剩下的豆子尽可能少。学生有很多方法：①一颗一颗地放，到最后剩下一颗；②两颗两颗地放，剩下一颗；③三颗三颗地放，最后发现不行，再调整。

2. 表象

这一阶段，学生有两种学习形式：①脑袋里面回想着刚才分豆子的操作过程，最后得到每个盘子放 2 颗，还剩下一颗；②画出图像，用图像表示结果（见图 1.2－4）。

3. 符号

用除法式子表示分豆子的结果，有横式和竖式两种形式。

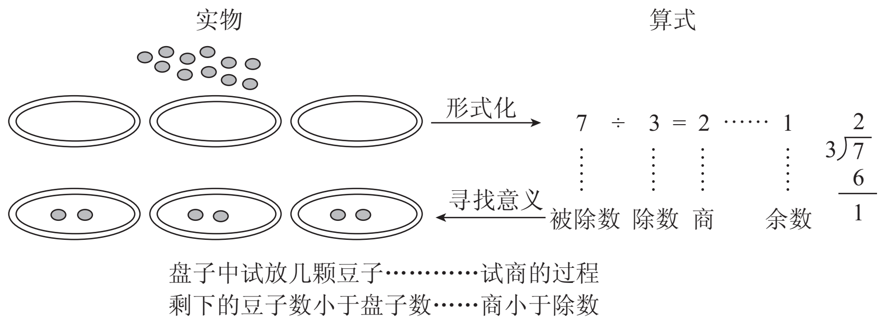

图 1.2-4

4. 关系

将除法算式用其他形式表示，比如 $7=3\times2+1$（$0<1<3$）。对此一般化，得到带余除法的运算规则：被除数 = 除数 × 商 + 余数（0 < 余数 < 除数）。

电子图书馆

［1］戎松魁．理解“有余数除法定义”是找到“到底错在哪一步”的关键［J］．中小学数学（小学版），2012（7-8）．

［2］蔡金法．小学数学教师的专业素养：以如何上好一堂课的视角来探讨［J］．小学教学（数学版），2014（7-8）．

1.2.5　混合运算

在一个算式里，如果有两种或者两种以上的运算，通常称为混合运算。加、减、乘、除的混合运算，又称为四则混合运算。

在四则混合运算中，将加法和减法看作一级运算，乘法和除法看作二级运算。混合运算的具体运算顺序如下：

（1）在没有括号的算式中，如果为同一级运算，则从左向右依次进行运算；如果为混合运算，则先算乘除，后算加减。

（2）在有括号的算式中，先算括号里面的，再算括号外面的；如果有多种括号，先算小括号里面的算式，再算中括号里面的算式，最后算大括号里面的算式。

从上述两条运算规则可以看出：括号是用来改变运算顺序的。通常的括号

有小括号，又叫圆括号，记作（ ）；中括号，又叫方括号，记作［ ］；大括号，又叫花括号，记作｛ ｝。

对于为何“先算乘与除，后算加与减”？这是一条规定，其合理性在于：①如果依次运算，$3+2\times4$ 就会和 $(3+2)\times4$ 结果相同，违背了追求简洁的原则；②如果把乘还原为加，统一为同一种运算，应该是 $3+2+2+2+2=11$，与“先乘除后加减”结果一致。

概念辨析 运算律与运算顺序

运算律是指定义在某个集合中的一种运算具备的性质。比如乘法交换律 $ab=ba$，当 a、b 定义在自然数、整数、有理数、实数等集合上时，具备交换律的性质，而当 a、b 定义在矩阵的集合上时，不具备交换律的性质。

一个算式中涉及多个运算时，必须规定先进行哪些运算，后进行哪些运算，这就是运算顺序。如果没有运算顺序，随机选择运算，可能会造成运算结果的不一致，影响数学运算结果的确定性。

拓展阅读 运算符号的起源

运算符号是从 15 世纪开始才逐渐使用的。1489 年，德国数学家魏德曼（Johann Widman）首先创造性地使用“+”表示加、“-”表示减。他把一条横线和一条竖线合并在一起表示合并（增加）的意思，从加号中去掉一条竖线，表示拿去（减少）的意思。

1631 年，英国数学家鸥德莱（William Oughtred）使用“×”表示乘。因为乘法是特殊的加法，鸥德莱把加号“+”倾斜，用来表示乘。

17 世纪，瑞士学者拉恩（Johann Heinrich）使用“÷”表示除以。因为除以表示分开的意思，拉恩用一条竖线分开两个小圆点，形象地表示除以。

16 世纪，英国医生雷科达（Robert Recorde Rahn）认为，最能表示相等的是一对平行线，他就用两条等长的线段“=”表示相等，这就是我们现在的等号。

电子图书馆

［1］郜舒竹，刘莹，王智秋．“估算”在数学课程中的矛盾分析［J］．课程·教材·教法，2013（1）．

［2］郜舒竹，郑丽丽．估算方法知多少［J］．教学月刊（小学版·数学），2012（10）．

1.3 整数

◉学习目标

1. 理解数学中负整数产生的原因，理解负整数的数学含义；
2. 掌握整数四则运算的法则，掌握整数的基本性质；
3. 了解 0 和 1 这两个特殊整数在数学上的意义。

1.3.1 负整数

我们知道，自然数集对减法运算不封闭。也就是说，在 $\mathbf{N}$ 中，当 $a \geqslant b$ 时，$a-b \in \mathbf{N}$；当 $a<b$ 时，$a-b \notin \mathbf{N}$。为可保证减法的实现，我们需要引进负数①。对任意一个非零的自然数 n，我们引进一个数 $-n$ 与之对应，满足 $n+(-n)=(-n)+n=0$，这里的 $-n$（$n \in \mathbf{N}$，$n \neq 0$）叫作负整数。

其实，负数的产生经历了一个漫长的历史过程。中国人在《九章算术》的“方程”一章中，在解方程组时，因涉及小数减大数的情况，就引入了负数。之后，汉代数学家刘徽（约 225—295），给出了正负数的加减法则，元代数学家朱世杰给出正负数的乘除法则。这些数学成果后来经过印度传到阿拉伯，再从阿拉伯传到欧洲。

负数在欧洲引起不小的震动，很多数学家都曾对负数表示过怀疑，也进行了不少批判。比如，根据原有经验，大数除以小数的结果大于 1，而有了负数之后，$4 \div (-2) < 1$，这似乎难以接受。直到 17 世纪，笛卡儿创立解析几何，负数获得了几何解释和实际意义，负数才逐渐被数学界认可并使用。

教学链接 | 负整数的意义

在小学范围内，我们怎样理解负整数的产生和性质呢？在非负数范围内，我们没办法计算 $5-8$，但可以尽量将它化简，即根据差不变的性质，得到 $5-8=0-3$，把 $0-3$ 看作一个新的数，简单记作 -3。而原来在非负数范围内可以进行的减法还按原来的方法进行，比如 $8-5=3-0=0+3=3$。更一般的，数

① R. 柯朗，H. 罗宾. 什么是数学［M］. 左平，张饴慈，译. 上海：复旦大学出版社，2005.

学上规定形如 3（$=0+3$）、5（$=0+5$）这样的数叫作正数，形如 -3（$=0-3$）、-5（$=0-5$）这样的数叫作负数，把正数、零和负数统称为有理数。

1.3.2　整数运算

数学上，把正整数、零和负整数统称为整数。整数可以看作自然数中加入负整数后，得到的一个更大的数集合。

在整数范围内，如何进行加减法运算呢？很容易，按照自然数的加减法进行计算就可以了。比如，$8+(-13)=8+(0-13)=8-13=0-5=-5$，$9-(-4)=9-(0-4)=9-0+4=13$，$-7-(-5)=(0-7)-(0-5)=0-7+5=5-7=0-2=-2$。可以验证，在有理数范围内，加减法可以畅通无阻地进行，加法交换律和结合律仍然成立。

在整数范围内，如何比较数的大小呢？数学上规定：如果 $a-b>0$，则 $a>b$；如果 $a-b=0$，则 $a=b$；如果 $a-b<0$，则 $a<b$。比如，因为 $(-8)-(-5)=-3<0$，所以 $-8<-5$。

教学链接｜负整数的大小比较

在小学阶段，要求不是特别严格，如果注意到 $-8=0-8$、$-5=0-5$，因为 $0-8<0-5$（被减数相同，减数越大，差越小），也可以得到 $-8<-5$。这对学生来讲是比较容易接受的。

在整数范围内，借助负整数的本质，可将整数乘法转化为自然数乘法来讨论，而且该过程并不复杂（但要事先规定：零乘任何整数都等于零）。为了论述方便，我们用 a，b 表示任意两个自然数，而用 $-a$，$-b$ 表示任意两个负整数，对任意两个非零整数相乘的四种情况分别介绍如下：

（1）正数 × 正数，仍然按照非负数的方式进行，即 $a\times b=ab$；

（2）正数 × 负数，$a\times(-b)=a\times(0-b)=a\times0-a\times b=0-ab=-ab$（其中第二个等号成立的依据是乘法分配律，第四个等号成立的依据是负整数的定义）；

（3）负数 × 正数，$(-a)\times b=(0-a)\times b=0\times b-a\times b=0-ab=-ab$；

（4）负数 × 负数，$(-a)\times(-b)=(0-a)\times(-b)=0\times(-b)-a\times(-b)=0-a(-b)=-a(-b)=-(-ab)=-(0-ab)=ab-$

$0 = ab$［其中，第五个等号成立依据（2）中的结果，第六个和第七个等号成立的依据是负整数的定义］。

为了便于运算，人们将整数乘法与自然数乘法建立联系，得到整数乘法的计算法则：两个整数相乘，同号为正，异号为负，并把绝对值相乘；零乘任何一个整数，结果为零。

整数加法和乘法的基本性质（即对任何整数 a，b 和 c 都成立），见表1.3－1。

表 1.3－1　整数加法与乘法的基本性质

性质	加法	乘法
封闭性	$a+b$ 是整数	ab 是整数
结合律	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
交换律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
存在单位元	$a+0=0+a=a$	$a1=1a=a$
存在逆元	$a+(-a)=(-a)+a=0$	整数集中，只有 1 或 －1 关于乘法存在单位元
分配律	—	$(a+b)c=ac+bc$

电子图书馆

［1］曾小平，石冶郝．负数的本质与有理数乘法法则［J］．教学月刊（中学版），2012（1）．

［2］柳笛．数学家对负数大小关系认识的历史片段［J］．湖南教育，2008（1）．

［3］曾小平，涂荣豹．基于数学规定的“有理数乘法”教学［J］．中学数学教学参考，2009（1－2）．

在整数范围内，如何进行除法运算呢？将除法看作乘法的逆运算，借助乘法来计算除法。比如，要计算 $18 \div (-3)$，就想（　）$\times (-3) = 18$，因为 $(-6) \times (-3) = 18$，所以 $18 \div (-3) = -6$。再如，要计算 $(-56) \div (-7)$，就想（　）$\times (-7) = -56$，因为 $(8) \times (-7) = -56$，所以 $(-56) \div (-7) = 8$。

为了便于运算，人们将整数除法与自然数除法建立联系，得到整数除法的计算法则：两个整数相除，同号为正，异号为负，并把绝对值相除；零除以一个不等于零的数，商为零；零除以零，没有意义。

概念辨析 相反数与绝对值

只有符号不同的两个数，其中之一叫作另一个的相反数。有时也说这两个数互为相反数。零的相反数是零。在数轴上，互为相反数的两个数表示的点，到原点的距离相等。

在数轴上，某个数表示的点到原点的距离叫作这个数的绝对值。正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。互为相反数的两个数，绝对值相等。

1.3.3　特殊整数

1. 整数 0

第一个特殊整数是 0。原来 0 不叫自然数，但是在 1993 年，《中华人民共和国国家标准》（GB3100 − 3102 − 93）第 311 页规定：0 是自然数，表示一个也没有。

把 0 纳入自然数也有很多好处：0 与空集基数相对；0 是加法的不变元，即任何数加 0 还等于其本身；有了 0 才有相反数，为负数创造条件；0 使减法更广泛，出现 $2-2$，$4-4$；0 在 1 之前，高考填报零志愿（提前录取）；出现 0，产生负整数，自然数扩充到整数。可见，0 的实际意义还是比较丰富的。

为何规定“0 不能作除数”呢？理由有两个：①根据乘除互为逆运算，任何数乘零都不等于一个非零数 a，$a \div 0$ 的商不存在，所以 $a \div 0$ 没有意义；②根据包含除，a 中包含多少个 0 呢？即 $a-\underbrace{0-0-\cdots-0}_{\text{多少个0呢?}}=0$，答案未知。

自然数扩充到整数后，0 的意义也更加丰富了；0 不再是最小的数了，而是成为正负数的分界点，正整数比它大，负整数比它小。同时，0 也成为正整数和负整数这对矛盾统一体彼此转化和过渡的桥梁。

正因为如此，我们才可以选择 0 作为标准（中间值），用正整数和负整数来刻画一对具有相反意义的量，比如刻画温度、标记存取钱、表达结余与亏损等。

但是，将 0 看作自然数也引发了一些问题，比如，0 作除数会怎样？0 是质数还是合数？最小的一位数是几？0 的约数是多少？0 是任何一个自然数的倍数吗？这些问题，在小学数学教育界曾经引起较大争论，但至今尚无定论。

鉴于此，本书提醒各位读者：0 只是一个自然数，对它的意义和特性不要过分追究，否则在小学阶段很难向学生解释，也会引发一连串的问题，反而干扰

学生的正常学习。

拓展阅读 0 的历史

数字 0 的出现，是数学史上的重大创造。0 一直被认为是阿拉伯数字，但它的起源在印度和中国。

3—6 世纪，古代印度产生了十进制计数法，规定出十个数字符号。起初，古印度人用“·”表示空位，后来演变成“0”。在古代印度，0 的梵文名称为 sunya，汉语译为“舜若”，意为“空”。一切皆空，这是 0 的特性，反映了古代印度佛教认识万物的痕迹。

古代中国将算筹摆成不同的形状来记录数字。1～9 都用算筹表示，0 用空位表示。后来用“□”，为了便于书写，演化成圆圈“○”。用“○”代表零最早见于 1180 年的《大明历》。到了 1247 年，宋元时期的数学家秦九韶就大量使用“○”。

符号 0 刚引入到西方时，曾经引起西方人的困惑。当时西方认为所有数都是正数，而 0 这个数字会使很多算式逻辑不能成立（比如除以 0）。甚至认为是魔鬼数字，而被禁用。直至十五六世纪，0 和负数才逐渐为西方人所认同，西方数学才有了快速发展。

2. 整数 1

第二个特殊整数是 1，其特殊性表现在：1 是构成自然数的单位，由它构成其他非零自然数；1 是乘法的不变元，也就是说任何数乘 1 还等于自身；乘法有了不变元，才有逆元（也就是通常说的倒数），为除法奠定基础；1 既不是质数，也不是合数；1 在分数中，被视作整体，常叫作单位 1；在比的问题中，1 作为基准量。

1 具有相当丰富的数学性质：任何数除以 1 都等于它的本身；两个互质数的最大公因数是 1；1 的因数只有它本身，是任何正整数的公因数；1 的倒数是 1；1 的绝对值还是 1；1 的算术方根还是 1；1 是最小的完全平方数；任何数的 1 次方都为原数；1 的任何次幂都是 1。

拓展阅读 1 的文化

“一”的古代写法是“弌”，在以部首检字法为主的中文字典中，“一”往往是第一个部首和第一个字。

在人类文化中，“一”被赋予了万物之始的意义：“惟初太极，道立于一，

造分天地，化成万物，凡一之属皆从一。”（《说文解字》）英文中也以“The Great One”（伟大的一）指代圣经中的上帝耶和华。

在哲学上，尤其是《老子》中，“一”的含义更加广泛：“道生一，一生二，二生三，三生万物。万物负阴而抱阳，冲气以为和。”意思是：一乃万物之始，古代哲人把一作为万物之始，叫作太极，太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦。

在乐理中，简谱上的 do 音用 1 表示。在比赛中，1 代表得到第一名，代表比赛优胜。

练　习　一

1. 读出下面各数。
   43571600；90000560001；756004080；10800000104；8400573000。
2. 儿童在写数时，有时会把“十二”写成“102”，请分析其中的原因，并说说你的教学建议。
3. 阐述基于自然数序数理论的加法和乘法定义，并基于该归纳定义计算 $6+4$ 和 6×4。
4. 任意两个自然数 a 和 b，定义新运算 ∇，使得以下等式成立：$0\nabla a=a$；$a\nabla b=(a-1)\nabla b+ab$。试求 $3\nabla7$ 的值。
5. 自然数 $A=\overline{ab}_{(5)}$，$B=\overline{ba}_{(5)}$，如果 A 与 B 所表示的十进制数相差 12，求 A 和 B。
6. 计算 $14-6$，有以下几种方法，说说每种方法的道理。
   ①从 14 起往回数数，13，12，11，10，9，8，结果为 8；
   ②从 14 中减去 4 得 10，再从 10 中减去 2 得 8，结果为 8；
   ③从 10 里减去 6 得 4，再 $4+4=8$，结果为 8；
   ④因为 $6+8=14$，所以 $14-6=8$。
7. 在自然数范围内，证明下面各式的结论。
   （1）$a-(b+c)=a-b-c$；
   （2）$a-(b-c)=a-b+c$；
   （3）$a\div(b\div c)=a\div b\times c$；
   （4）$a\div(b\times c)=a\div b\div c$。
8. 阐述加法“和不变的性质”，并用它计算 $465+496$。
9. 阐述减法“差不变的性质”，并用它计算 $465-196$。
10. 计算 32×12 时，有以下几种方法，说一说每种方法的道理。

（1）$32\times4+32\times8$；（2）$32\times6\times2$；（3）$32\times10+32\times2$。

11. 甲说：因为 $0\times0=0$，所以 $0\div0=0$。
    乙说：因为 $0\times1=0$，所以 $0\div0=1$。
    他们的说法对吗？为什么？根据自己的理解，说一说 0 为什么不能作除数。
12. 小学数学中，自然数的除法有两种类型，即等分除与包含除，请举例说明。
13. 某个除法算式中，商是整数没有余数。某个粗心的同学误把最高位上的数字 3 写成了 8，得到的商增加了 19，余数是 3。那么原来算式中除数最小是多少？
14. 阐述负整数的数学本质，并计算 $(-6)-(-4)$ 和 $9-(-4)$。
15. 认真阅读人教版教材引入“有理数乘法”的情境，分析教材的设计意图，并给予评论。

    一只蜗牛沿着直线 l 爬行，它现在的位置恰好在 l 上的点 O。根据生活经验推断：

    如果蜗牛一直以每分钟 2 厘米的速度向右爬行，3 分钟后它在什么位置？

    如果蜗牛一直以每分钟 2 厘米的速度向右爬行，3 分钟前它在什么位置？

    如果蜗牛一直以每分钟 2 厘米的速度向左爬行，3 分钟后它在什么位置？

    如果蜗牛一直以每分钟 2 厘米的速度向左爬行，3 分钟前它在什么位置？
16. 认真阅读北师大版教材引入“有理数乘法”的情境，分析教材的设计意图，并给予评论。

    计算下面的算式：

    $(-3)\times3=-9$

    $(-3)\times2=-6$

    $(-3)\times1=-3$

    $(-3)\times0=0$

    在此基础上，猜想

    $(-3)\times(-1)=$

    $(-3)\times(-2)=$

    $(-3)\times(-3)=$

    等算式的结果，进而归纳出有理数乘法法则。