目 录

第六章
空间解析几何

典型例题

例 1　已知空间两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$，$M_2(1,3,0)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦，并求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平行的单位向量.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt{2})$，$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$，

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平行的单位向量为

$$\pm\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\pm(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

例 2　设向量 $|a|=6$，与 x、y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，求 a 的坐标表示式.

解　$\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\beta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

故

$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0,\text{即 }\cos\gamma=0,$$

$$a_x=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3},\ a_y=6\times\frac{1}{2}=3,\ a_z=0,\ a=(3\sqrt{3},3,0).$$

例 3　已知单位向量 e 与坐标轴夹角相等且为锐角，向量 $a=(2,1,0)$，求 $\mathrm{Prj}_e a$.

解　设 $e=\cos\alpha_i+\cos\beta_j+\cos\gamma_k$，其中 α,β,γ 为 e 的三个方向角且为锐角，由已知 $\alpha=\beta=\gamma$ 及 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，可得 $3\cos^2\alpha=1$，即 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$e=\frac{1}{\sqrt{3}}i+\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}k,$$

故

$$\mathrm{Prj}_e a=a\cdot e=\frac{1}{\sqrt{3}}\times2+\frac{1}{\sqrt{3}}\times1+\frac{1}{\sqrt{3}}\times0=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

例 4　设 $a=3i+2j-k$，$b=2i+4j+6k$，求 $\mathrm{Prj}_a b$ 及 $\cos(\hat{a,b})$.

解　$\mathrm{Prj}_a b=\frac{a\cdot b}{|a|}=\frac{6+8-6}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{8}{\sqrt{14}}$

$$\cos(\hat{a,b})=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}.$$

例 5　设 $a=2i-4j-5k$，$b=i-2j-k$，求 $(-2a)\cdot(3b)$，a 与 b 的夹角 θ.

解　$a\cdot b=2\times1+(-4)\times(-2)+(-5)\times(-1)=15.$

$(-2a)\cdot(3b)=-6(a\cdot b)=-6\times15=-90.$

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{15}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-5)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{30}},\ \theta=\arccos\frac{5}{\sqrt{30}}.$$

例 6 (1)设 $a=2i+j+2k$,向量 x 与 a 共线,且 $a\cdot x=-9$,求向量 x 的坐标.

(2)已知 a、b、c 都是单位向量,且满足 $a+b+c=0$,求 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$.

解 (1)设 $x=\lambda a$,$-9=a\cdot x=\lambda(a\cdot a)=9\lambda$,所以 $\lambda=-1$, $x=-a=(-2,-1,-2)$.

(2) $(a+b+c)\cdot(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2a\cdot b+2b\cdot c+2c\cdot a$

由于 $a+b+c=0$,a、b、c 都是单位向量,故

$$1+1+1+2a\cdot b+2b\cdot c+2c\cdot a=0.$$

得
$$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=-\frac{3}{2}.$$

例 7 向量 $7a-5b$ 与 $7a-2b$ 分别垂直于向量 $a+3b$ 与 $a-4b$,求向量 a 与 b 的夹角.

解 由题设有 $\begin{cases}(7a-5b)\cdot(a+3b)=0,\\(7a-2b)\cdot(a-4b)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}7a^2+16a\cdot b-15b^2=0,\\7a^2-30a\cdot b+8b^2=0.\end{cases}$

解得 $a^2=2a\cdot b$, $b^2=2a\cdot b$, $\cos(a\overset{\wedge}{,}b)=\dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\dfrac{a\cdot b}{\sqrt{2a\cdot b}\cdot\sqrt{2a\cdot b}}=\dfrac{1}{2}$,

所以 $(a\overset{\wedge}{,}b)=\dfrac{\pi}{3}$.

例 8 已知三点 $M(1,1,1)$,$A(2,2,1)$,$B(2,1,2)$,求 $\angle AMB$.

解 作向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$,$\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角. 这里 $\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$,从而 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1$.

$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$.

代入两向量夹角余弦的表达式,得 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

由此得 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

例 9 向量 a , b , c 具有相同的模,且两两所成的角相等,若 a , b 的坐标分别为 $(1,1,0)$ 和 $(0,1,1)$,求向量 c 的坐标.

解 设向量 c 的坐标为 (x,y,z). 由于三个向量的模相等,两两的夹角相等,有

$$a\cdot b=b\cdot c=c\cdot a,|c|=|a|,$$

即 $\begin{cases}x+y=1,\\y+z=1,\\x^2+y^2+z^2=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=0,\\z=1.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3},\\y=\dfrac{4}{3},\\z=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

所以向量 c 的坐标为 $(1,0,1)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

例 10 设 $a=(3,4,-2)$,$b=(2,1,4)$,问 λ 与 μ 关系如何,才能使 $\lambda a+\mu b$ 与 z 轴垂直.

解 $\lambda a+\mu b$ 与 z 轴垂直,即 $(\lambda a+\mu b)\cdot k=0$,

而 $\lambda a+\mu b=(3\lambda+2\mu,4\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)$, $k=(0,0,1)$,

故 $(\lambda a+\mu b)\cdot k=(3\lambda+2\mu)\times0+(4\lambda+\mu)\times0+(-2\lambda+4\mu)\times1=4\mu-2\lambda=0$.

即 $\lambda=2\mu$ 时, $\lambda a+\mu b$ 与 z 轴垂直.

例 11　设 $|a|=4,|b|=3,(\widehat{a,b})=\dfrac{\pi}{6}$,求向量 $a+2b,a-3b$ 为邻边的平行四边形的面积.

解　由

$$\begin{aligned}(a+2b)\times(a-3b)&=a\times a-3(a\times b)+2(b\times a)-6(b\times b)\\&=-5(a\times b),\end{aligned}$$

则以向量 $a+2b,a-3b$ 为邻边的平行四边形的面积为

$$|(a+2b)\times(a-3b)|=|-5(a\times b)|=5|a||b|\sin\frac{\pi}{6}=30.$$

例 12　设 $a=(2,1,-1),b=(1,-1,2)$,求与 a,b 皆垂直的单位向量.

解　$a\times b=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & 1 & -1\\1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}k=i-5j-3k$,

$c^0=\dfrac{c}{|c|}=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+(-5)^2+(-3)^2}}(1,-5,-3)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}},\dfrac{-5}{\sqrt{35}},\dfrac{-3}{\sqrt{35}}\right).$

故所求为 $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}},\dfrac{-5}{\sqrt{35}},\dfrac{-3}{\sqrt{35}}\right).$

例 13　已知空间三点 $A(1,2,3,),B(3,4,5),C(2,4,7)$, 求 ΔABC 的面积.

解　$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$,$\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & 2 & 2\\1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4i-6j+2k,$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{56},$$

故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14}.$

例 14　向量 d 垂直于向量 $a=(2,3,-1)$ 和 $b=(1,-2,3)$,且与 $c=(2,-1,1)$ 的数量积为 -6,求向量 d.

解　d 垂直于 a 与 b ,故 d 平行于 $a\times b$,存在数 λ 使

$$\begin{aligned}d&=\lambda(a\times b)=\lambda(2,3,-1)\times(1,-2,3)\\&=(7\lambda,-7\lambda,-7\lambda),\end{aligned}$$

因 $d\cdot c=-6$,故 $2\times7\lambda+(-1)\times(-7\lambda)+1\times(-7\lambda)=-6,\lambda=-\dfrac{3}{7}$,

因此 $d=(-3,3,3)$.

例 15　已知 $|a\cdot b|=3$, $|a\times b|=4$, 求 $|a|\cdot|b|$.

解

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\cos\theta=3,\tag{1}$$

$$|a\times b|=|a|\cdot|b|\sin\theta=4,\tag{2}$$

$(1)^2+(2)^2$ 得 $(|a|\cdot|b|)^2=25$, 所以 $|a|\cdot|b|=5$.

例 16　已知向量 x 与 $a=(1,5,-2)$ 共线,且满足 $a\cdot x=3$, 求向量 x 的坐标.

解　由已知向量 x 与 $a=(1,5,-2)$ 共线,所以设 $x=\lambda a$,

则 $a\cdot x=\lambda(a\cdot a)=3$,又 $a=(1,5,-2)$, 因此 $30\lambda=3$,有 $\lambda=\dfrac{1}{10}$,

所以 $x=\frac{1}{10}a=\left(\frac{1}{10},\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$.

例 17 已知 $a\times b=c\times d,a\times c=b\times d$，求证：$a-d$ 与 $b-c$ 共线.

证明 只须证 $(a-d)\times(b-c)=0$. 因为

$$(a-d)\times(b-c)=a\times b-a\times c-d\times b+d\times c,$$

而

$$a\times b=c\times d,a\times c=b\times d,$$

则

$$(a-d)\times(b-c)=0.$$

例 18 求过点 $(3,0,-5)$ 且平行于平面 $2x-8y+z=0$ 的平面方程.

分析 此题用平面的点法式方程. 若平面 π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，其法向量 $n=(A,B,C)$，则 π 的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

解 平面 $2x-8y+z=0$ 的法向量为 $(2,-8,1)$，

因所求平面与已知平面平行，即其法向量也可取为 $(2,-8,1)$，

故所求平面方程为 $2(x-3)-8y+(z+5)=0$，即 $2x-8y+z-1=0$.

例 19 求过三点 $M_1(2,-1,4),M_2(-1,3,-2),M_3(0,2,3)$ 的平面方程.

解 由法向量及向量的向量积定义知，平面的法向量 n 可选为 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$，

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6),\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$.

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14i+9j-k.$$

故平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$，即 $14x+9y-z-15=0$.

例 20 一平面过坐标原点，且与 $2x-y+5z+3=0$ 和 $x+3y-z-7=0$ 垂直，求此平面.

解 依题意，可设平面方程为 $Ax+By+Cz=0$，

显然，其法向量 $n=(A,B,C)$ 与 $n_1=(2,-1,5)$ 及 $n_2=(1,3,-1)$ 垂直，

故可取 $$n=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-14i+7j+7k,$$

平面方程为 $2x-y-z=0$.

例 21 若点 $A(2,0,-1)$ 在平面 π 上的投影为 $B(-2,5,1)$，求平面 π 的方程.

解 依题意，设平面的法向量为 $n=(4,-5,-2)$，

代入平面的点法式方程为 $4(x+2)-5(y-5)-2(z-1)=0$，

整理得所求平面方程为 $4x-5y-2z+35=0$.

例 22 一平面过 $A(1,1,1),B(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求此平面方程.

解 显然所求平面的法向量 n 既垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 又垂直于平面 $x+y+z=0$ 的法向量

$n_1=(1,1,1)$，故可取 $$n=\overrightarrow{AB}\times n_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2i-j-k.$$

平面方程为 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$，即 $2x-y-z=0$.

例 23　求通过 x 轴，且点 $(5,4,-3)$ 到该平面的距离等于 3 的平面方程.

解　由于所求平面过 x 轴，故平面的一般方程为

$$By+Cz=0.$$

又点 $(5,4,-3)$ 到所求平面的距离等于 3，有

$$\frac{4B-3C}{\sqrt{B^2+C^2}}=3,$$

解之，$B=0, B=\frac{24}{7}C$，将 $B=0$ 及 $B=\frac{24}{7}C$ 分别代入 $By+Cz=0$ 并消去 C，即得所求平面方程

$$z=0 \text{ 或 } 24y+7z=0.$$

例 24　求经过点 $A(3,2,1)$ 和 $B(-1,2,-3)$ 且与坐标平面 xOz 垂直的平面的方程.

解　与 xOz 平面垂直的平面平行于 y 轴，方程为

$$Ax+Cz+D=0 \tag{1}$$

把点 $A(3,2,1)$ 和点 $B(-1,2,-3)$ 代入上式得

$$3A+C+D=0, \tag{2}$$

$$-A-3C+D=0, \tag{3}$$

由(2)，(3)得 $A=-\frac{D}{2}$，$C=\frac{D}{2}$，代入(1)得 $-\frac{D}{2}x+\frac{D}{2}z+D=0$.

消去 D 得所求的平面方程为 $x-2-z=0$.

例 25　求过两点 $(0,-1,0),(0,0,-1)$ 且与平面 $y+z=7$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的平面方程.

解　由于所求平面过两点 $(0,-1,0),(0,0,-1)$，由平面的截距式方程可设所求平面方程为

$$Ax-y-z=1,$$

因而所求平面的法向量为 $n_1=(A,-1,-1)$. 已知平面的法向量 $n_2=(0,1,1)$. 因而由两个平面夹角公式，得

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}=\frac{|(-1)\times 1+(-1)\times 1|}{\sqrt{2}\sqrt{A^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2},$$

解得 $A^2=6, A=\pm\sqrt{6}$.

故所求平面方程为

$$\pm\sqrt{6}x+y+z+1=0.$$

例 26　平面在 y,z 轴上的截距分别为 30，10，且与 $r=(2,1,3)$ 平行，求该平面方程.

分析　若平面 π 与 x,y,z 轴分别交于 $P(a,0,0),Q(0,b,0),R(0,0,c)$ 三点 $(abc\neq 0)$，则 π 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

解　设平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{30}+\frac{z}{10}=1$,

依题意，其法向量 $n=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{30},\frac{1}{10}\right)$ 与 $r=(2,1,3)$ 垂直，即

$$n\cdot r=\frac{2}{a}+\frac{1}{30}+\frac{3}{10}=0, \text{得 } a=-6,$$

故平面方程为 $\dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{10}=1$.

例 27　已知两平面 $\pi_1:-2x+my-z+11=0$ 与平面 $\pi_2:mx-y-z=1$ 相互垂直，求 m 的值.

分析　平面 π_1 与 π_2 互相垂直，则其法向量内积为零.

解　平面 $\pi_1:-2x+my-z+11=0$，$n_1=(-2,m,-1)$，

　　平面 $\pi_2:mx-y-z=1$，$n_2=(m,-1,-1)$，

π_1 与 π_2 垂直，则 $n_1\perp n_2$，所以 $n_1\cdot n_2=0$，

即 $-2m-m+1=0$，所以 $m=\dfrac{1}{3}$.

例 28　将直线的一般方程 $\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+3z+4=0\end{cases}$ 化为对称方程与参数方程.

解　先找出这直线上的一点 M_0，例如可取 $x_0=1$，代入方程组，得 $\begin{cases}y+z=-2,\\y-3z=6.\end{cases}$

解得 $y_0=0$，$z_0=-2$　即(1,0,-2)是这直线上的一点.

下面再求直线的方向向量，由于两平面的交线与这两平面的法线向量都垂直，所以

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 1 & 1\\2 & -1 & 3\end{vmatrix}=4i-j-3k.$$

因此所求直线的对称式方程为　$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$.

令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}=t$，则得参数式方程为 $\begin{cases}x=1+4t,\\y=-t,\\z=-2-3t.\end{cases}$

例 29　λ 取何值时直线 $\begin{cases}x-2y+z-1=0\\\lambda x+2y+3z+1=0\end{cases}$ 与 x 轴相交?

解　直线 $\begin{cases}x-2y+z-1=0\\\lambda x+2y+3z+1=0\end{cases}$ 与 x 轴相交，则交点坐标为 $(x,0,0)$，代入直线方程为

$$x-1=0\,, \tag{1}$$
$$\lambda x+1=0\,. \tag{2}$$

(1)+(2)得 $(1+\lambda)x=0$，而原点 $O(0,0,0)$ 不在直线上，故 $x\neq 0$，所以 $1+\lambda=0$，$\lambda=-1$.

例 30　在平面 $2x-y+3z=0$ 上求作一直线，使它与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交.

解　已知直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=3t-1\\y=2t+1\\z=-t\end{cases}$$

将直线的参数方程代入已知平面 $2x-y+3z=0$，得 $t=3$，因而已知平面与已知直线的

交点为 $(8,7,-3)$，此点即可作所求直线的定点，所求直线的方向向量可取已知平面的法向量 $(2,-1,3)$ 与已知直线的方向向量 $(3,2,-1)$ 的向量积，即

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5i + 11j + 7k,$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-8}{-5} = \frac{y-7}{11} = \frac{z+3}{7}.$$

例 31　问两直线 $L_1: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-3}$ 和 $L_2: \begin{cases} x = 4t+2, \\ y = -t+3, \\ z = 2t-4 \end{cases}$ 是否相交？如相交，求出其交点；如不相交，求出两直线之间的距离 d.

解　直线 L_1 的方向向量 $s_1 = (2,1,-3)$，直线 L_2 的方向向量为 $s_2 = (4,-1,2)$，显然 s_1 与 s_2 不平行. 在 L_1 及 L_2 上分别取点 $M_1(-1,1,0)$，$M_2(2,3,-4)$，根据 L_1 与 L_2 相交的充分必要条件是三个向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，s_1，s_2 共面，由三个向量共面的条件，有

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

所以，直线 L_1 与 L_2 是异面直线.

设过 L_1 且与 L_2 平行的平面 π 的法向量为 s，则

$$s = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -i - 16j - 6k,$$

在 L_1 上取点 $M_1(-1,1,0)$，平面 π 的方程为

$$x + 16y + 6z - 15 = 0.$$

在 L_2 上取点 $M_2(2,3,-4)$，点 M_2 到平面 π 的距离为直线 L_1 与 L_2 之间的距离，即

$$d = \frac{|2 + 16 \times 3 + 6 \times (-4) - 15|}{\sqrt{1^2 + 16^2 + 6^2}} = \frac{11}{\sqrt{293}}.$$

例 32　求点 $P(-1,2,0)$ 在平面 $\pi: x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影.

解　设过点 P 且垂直于 π 的直线为 L，则 L 的方向向量可取为 $s = n = (1,2,-1)$.

L 的方程为 $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-1} = t$，化为 $\begin{cases} x = t-1, \\ y = 2t+2, \\ z = -t. \end{cases}$

代入 π，得 $(t-1) + 2(2t+2) - (-t) + 1 = 0$，$t = -\dfrac{2}{3}$.

得 L 与 π 的交点为 $\left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$，

故点 $P(-1,2,0)$ 在平面 π 上的投影为 $P'\left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

例 33 求通过 $M(-1,2,4)$，平行于平面 $\pi:3x-4y+z-10=0$ 且和直线 $L:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解法一 过点 M 且平行于已知平面 π 的平面方程为

$$3(x+1)-4(y-2)+(z-4)=0,$$

即

$$3x-4y+z+7=0.$$

将已知直线 L 化为参数方程 $\begin{cases}x=3t-3,\\ y=t+3,\\ z=2t\end{cases}$ 并代入 $3x-4y+z+7=0$，得 $t=2$，则已知直线 L 与平面 $3x-4y+z+7=0$ 的交点为 $Q(3,5,4)$，连接点 M,Q 的直线即为所求直线，直线方程为

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{0}.$$

注 也可直接利用

$$\begin{cases}3x-4y+z+7=0,\\ \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}.\end{cases}$$

求直线 L 与平面 $3x-4y+z+7=0$ 的交点 Q.

解法二 先求过点 M 且平行已知平面 π 的平面方程

$$\pi_1:3x-4y+z+7=0.$$

再求过 M 及已知直线 L 的平面方程 π_2，先在 L 上取一点 $M_0(-3,3,0)$ 与 M 构成向量 $\overrightarrow{M_0M}=(2,-1,4)$，此向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与直线 L 的方向向量 $s=(3,1,2)$ 作向量积，求得平面 π_2 的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-6\vec{i}+8\vec{j}+5\vec{k},$$

故平面 π_2 的方程为

$$-6(x+1)+8(y-2)+5(z-4)=0,$$

整理得

$$6x-8y-5z+42=0.$$

平面 π_1 与平面 π_2 的交线即为所求直线，其方程为

$$\begin{cases}3x-4y+z+7=0,\\ 6x-8y-5z+42=0.\end{cases}$$

例 34 求直线 $L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

解 设过直线 L 的平面束方程为 $x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$，
即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z+\lambda-1=0$，

若此平面与 π 垂直，则 $n_1\cdot n=0$，

$$(1+\lambda)\times1+(1-\lambda)\times1+(\lambda-1)\times1=0,\lambda=-1,$$