

目 录

第 1 章 数感	1
1.1 数感概述	2
1.2 数学课程中的数感	5
1.3 培养数感的教学建议	10
1.4 培养数感的教学案例分析	14
第 2 章 符号意识	21
2.1 数学符号概述	22
2.2 数学符号发展的几个阶段	25
2.3 培养符号意识的教学建议	29
2.4 培养符号意识的教学案例分析	34
第 3 章 空间观念	41
3.1 空间观念概述	42
3.2 数学课程中的空间观念	47
3.3 发展空间观念的教学建议	51
3.4 发展空间观念的教学案例分析	55
第 4 章 几何直观	59
4.1 几何直观概述	60
4.2 数学课程中的几何直观	64

4.3	发展几何直观的教学建议	67
4.4	发展几何直观的教学案例分析	70
第5章	数据分析观念	79
5.1	数据分析观念概述	80
5.2	数学课程中的数据分析观念	82
5.3	发展数据分析观念的教学建议	86
5.4	发展数据分析观念的教学案例分析	94
第6章	运算能力	101
6.1	运算能力概述	103
6.2	数学课程中的运算能力	105
6.3	培养运算能力的教学建议	108
6.4	培养运算能力的教学案例分析	117
第7章	推理能力	123
7.1	推理能力概述	124
7.2	数学课程中的推理能力	126
7.3	培养推理能力的教学建议	128
7.4	培养推理能力的教学案例分析	136
第8章	模型思想	139
8.1	模型思想概述	140
8.2	运用模型思想的基本步骤	146
8.3	培养模型思想的教学要求	155
8.4	培养模型思想的教学建议	157
第9章	应用意识	163
9.1	应用意识概述	164

9.2 数学课程中的应用意识	166
9.3 发展应用意识的教学建议	171
9.4 发展应用意识的教学案例分析	176
 第 10 章 创新意识	183
10.1 创新意识概述	184
10.2 数学课程中的创新意识	185
10.3 培养创新意识的教学建议	188
10.4 培养创新意识的教学案例分析	194
 附录：数学情境与提出问题教学	201

第1章 数 感

●情境引入

不同的人面对问题“小明家住在4楼，他家离地面大约多少米？”和“新学期，学校要购置一些新桌椅，每套桌椅118元，6000元够买43套桌椅吗？”，解决方式不同，结果也存在差异。产生差异的原因何在？在于每个人的数感不同。数感的个体差异导致了分析问题与解决问题的差异。数感既关乎从数量的角度认识事物的方式，也关乎从数学的角度解决问题的能力。

1.1 数感概述

1976年，卡本特和他的同事们在分析美国教育进展评价（National Assessment of Educational Progress, NAEP）的“数据在估算中的作用”时得出结论：在学生能很好地进行估算之前，他们一定发展着一种对数量的直觉，即一种用数表现量的感觉。后来这种对数量的感觉（直觉）被称为数感（number sense）。

拓展阅读

“number sense”，可译为“数感”“数觉”和“数意识”等。我国的义务教育数学课程标准取用了“数感”这一概念。不仅人有数感，许多动物也有数感。比如，一只狗面对一根骨头和一群狗面对一根骨头的反应是不一样的。

1989年，全美数学教师理事会（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）在《学校数学的课程与评价标准》^①（*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*）中将数感阐述为“对从各种不同含义抽象出来的数来说，是一种直观的活动”，并在“估算”“数的意义和计数法”“整数运算的概念”“数与数的关系”和“数系与数论”等标准中阐述了数感的表现和培养等问题。2000年，全美数学教师理事会在《学校数学教育的原则和标准》^②（*Principles and Standards for School Mathematics*）中进一步强调“数与运算标准的中心就是发展数感”。

2001年，我国《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》在“总体目标”中指出，数学教育要让学生“经历运用数学符号和图形描述现实世界的过程，建立初步的数感和符号感，发展抽象思维”。2012年，我国《义务教育数学课程标准（2011年版）》在“总目标”中指出，“建立数感、符号意识和空间观念，初步形成几何直观和运算能力，发展形象思维与抽象思维”。两个版本的课程标准在“数的认识”“数的运算”“实践活动”和“综合应用”等方面阐述了培养学生的数感问题，在“数与代数”的各个学段都强调了数感在体验和理解数学中的重要作用。

① 人民教育出版社出版的译本为《美国学校数学课程与评价标准》。——编者注

② 人民教育出版社出版的译本为《美国学校数学教育的原则和标准》。——编者注



1.1.1 数感的含义

数感是对数或量的感悟，感悟的对象是数和量以及它们之间的关系；数感含有直观的感受和合理的猜想，是思维与经验的结合物；数感是一种基本的数学素养，是潜层次的数学思维，其含义很难明确地界定。

1. 数感是对数（量）的直觉、敏感与理解

从直觉感知的角度去认识数感，数感是数概念在人脑中扩展后产生的一种对数学问题的敏感与理解。这种敏感与理解是对数（量）的直觉估计和判断，它帮助人们将对数（量）的直觉迅速地反映为数学问题，使数学问题从感知层面敏捷地链接到数学思维层面。首先，数感是对特定事物的现象或属性在数和量方面的敏感性及相关鉴别（鉴赏）能力，是一种自觉的“感知”。其次，数感是一种可以培养的直觉，它随着人对“数”概念的扩展和延伸而反映为对数感知的灵敏度。随着对数认识的深入，这种直觉水平不断提升。

2. 数感是对数的感悟

从直觉与思维相结合的角度去认识数感，数感是对数的感悟。感是外界刺激经过感觉器官产生的直观原始的经验；悟是在外界刺激之下经由大脑思维得到的认识。因此，数感既含有感知的成分，又含有思维的成分，是在实践中得到的有目的、有意识的反思，也就是一种感悟，是直观经验与理性思考的有机结合。数感主要来源于对数的意义的理解，来源于对许多数之间关系的领悟，来源于对数的重要性的认识，来源于对数的运算结果的预测。

3. 数感是关于数概念的网络结构

从个体认知结构的角度去认识数感，数感是关于数概念的知识网络结构。个体若具备这种组织良好的网络结构，就能够将一个数和它相关的运算特性相关联，并且以灵活的创造性的方式解决问题。也就是说，这个网络结构是随着数概念的不断扩大（自然数—分数—小数—有理数—实数—复数）在人脑中逐步形成的。它帮助人以数为基础逐步建构数学知识系统，并且能够自觉选择灵活而有创造性的方式从数（量）的角度出发思考 and 解决问题。

4. 数感是对数和数运算的理解

从数运算和运用的角度去认识数感，数感是人对数与数运算的一般性理解，这种理解可以帮助人们用灵活的方法做出数学判断和为解决复杂的问题提出有用的预设策略。数感是一种主动地、自觉地或自动化地理解数和运用数的态度与意识，是建立明确的数概念和有效地进行运算等数学活动的基础，是将数学



与现实问题建立联系的桥梁。



1.1.2 数感的特征

数感是感觉和思维的结合物，用定义的方式揭示它的含义比较困难，故可以从其特征的角度来认识数感。

1. 非精确性

数感是在完成具体任务时从所获得的经验中产生的，是关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟，是建立在经验与直觉基础上的模糊猜测，不容易加以系统性的表述和批判性的反思，以非精确的形式出现在人脑中。数感的这种非精确性主要体现在：（1）非算法性，数感不同于标准的算法化的程序，它的思维路径预先不易被确定和叙述，要在相应的问题情境中去感知；（2）合成性，数感的总路径不是“可见”的、简单的，而是包括许多细微的判断和解释，同时包括多个标准的运用，有时甚至各标准间会彼此冲突。

2. 文化依附性

研究者发现，中国的孩子比美国的孩子更容易理解“十进制”数的计数规则，这同各国使用的语言有关系。比如数字“12”，中文读作“（一）十二”，意义就是十加二，即1个十与2个一之和；而英文读作“twelve”，儿童不容易将它和“ten”与“two”联系起来。我国的“九九表”更是借助汉语言的特殊功能培养儿童数感的有力工具。可见，一个国家或民族的文化背景、传统思维习惯会影响儿童的认知与思维方式，也必然会影响儿童对数和量的认识与感悟，影响数感的形成与发展。因而有人认为，数感属于一种文化产物，“它的产生应该需要一定的文化背景做支撑”，是一种看不见的文化。

3. 元认知性

对数认识的方式会影响数感的教学。美国学者西尔弗将讨论数感的问题和讨论元认知的问题对照起来，认为：元认知研究者常用“规范”“监控”等词语来解释他们的研究成果，这有助于我们认识数感。数感是一大堆错综复杂的东西，我们无法准确地对其进行操作性定义，在确切把握它们的有机联系之前，只能对其进行零散的理解。数感的意义或许就体现在我们对数（量）的认识与把握过程的监控与调节上，这是一种“说不清，道不明”的无意识或者潜意识的指引。



1.1.3 数感的教学价值

1. 发展数感有利于培养学生“数学地”思考问题

在小学数学教学中，发展学生的数感有助于学生掌握应用数表示具体的数据和数量关系的能力；帮助学生判定不同的算术运算，在此基础上选择适当的方法实施运算（如心算、笔算、使用计算器算），并积累经验；发展学生对数学运算结果的预测能力，根据一定的条件进行估算，并对数据和推论的精确性、可靠性进行检验。可以说，建立和发展数感的过程是学习“数学地”思考的过程，也是领悟“数学化”的过程。

2. 发展数感有利于培养学生的创新精神和实践能力

学生在建立数感的过程中，有很多机会接触和体验现实问题，交流自己对数问题的个性化看法，用不同的方式思考 and 解决同一问题，对原有的数学知识结构进行改造。这无疑有助于发展学生的创新精神和实践能力。同时，具有良好数感的人会凭借对数（量）的本质认识建构自身的数概念网络，有效地接纳数学知识，形成良好的数学意识，即使在遇到实际问题时，也会灵敏地链接数学思维，从而进行“数学的”思考，创造性地解决实际问题。

3. 发展数感有利于传承民族文化与思维习惯

数感具有文化依附性，反映了特定文化背景下人们思考问题的方式和习惯。发展数感的过程是传承民族文化和思维习惯的过程，是改造和优化民族文化使其更加具有理性精神的过程。

4. 发展数感能增进学生的元认知能力

一个有良好数感的解题者在解题过程中会根据题意合理预设答案的可能类型与可能数据，并能根据经验和感觉拒绝不合理的答案。在运算的过程中，他会自问：这个问题的答案是什么种类的数？大概有多大？可能的数值范围为何？运算完成之后，这个答案和我所预期的是否一致？由于这是一种设定目标—检验目标符合的情况—修正答案的元认知过程，因此，从认知心理学的观点来看，数感与元认知有一定程度的重叠。

1.2 数学课程中的数感

我国数学课程中数感的很多内容是从美国借鉴过来的。因而，了解美国数



学课程标准中数感的含义与教学，对认识我国数学课程中的数感有很大的帮助。



1.2.1 美国数学课程中的数感

2000 年全美数学教师理事会颁布的《学校数学教育的原则和标准》对数感给予了特别关注，认为“理解数和运算、发展数感和进行熟练的算术运算”是小学数学教育的核心。

《学校数学教育的原则和标准》在“数与运算标准”中明确指出，“这一标准的中心是培养学生的数感，就是用 100 或 $1/2$ 这样特定的数作参考自然地分解数字的能力，运用从算术运算到问题解决之间关系的能力，理解十进制数的能力，估算能力，理解数字含义的能力，以及对数的绝对和相对大小的辨认能力”，并着重强调学前期至十二年级的数学教育应该使所有学生能够“理解数、表征数的方法、数量关系以及数系；理解运算的意义及各运算间的联系；熟练地计算并进行合理的估算”。

以“数与运算标准”为依据，《学校数学教育的原则和标准》分四个学段——学前期至二年级、三至五年级、六至八年级、九至十二年级——结合具体的实例详细描述了数感的教学方法、学生应该达到的水平和教师应该发挥的作用。例如，发展学前期至二年级学生的数感即培养学生四个方面的能力，在此，不妨将之称为思考、联系、推理和发现四个层次。这一阶段学生数感的特征与行为表现如表 1-2-1 所示。

表 1-2-1 学前期至二年级学生数感的特征与行为表现

层次	特征	行为表现
思考	脱离具体实物，用数进行抽象思考	面对问题“总共有 7 块积木，遮盖住其中的一些，能看见 4 块，遮盖住几块积木？”时，能从 4 开始数“5、6、7”，从而得出被遮盖住的积木有 3 块
联系	将数与实物模型联系起来	能把数“25”与实物模型“2 个串有 10 个珠子和 1 个串有 5 个珠子”联系起来；能够说出 25 是 2 个十和 5 个一组成的
推理	对数量进行估计和推理	能估算出 $3 + 4$ 必小于 10，因为每个加数都小于 5
发现	发现并使用某些数和运算的规律与性质	如由 $50 - 10 = 150 - 110 = 40$ 等式子能发现“被减数和减数同时加上一个数，差不会改变”的性质



1.2.2 我国数学课程中的数感

了解我国数学课程中数感的变化,有利于理解我国数学课程中数感的意义和把握数感的教学。

1. 数学教学大纲中的数感

《九年义务教育全日制小学数学教学大纲(试用修订版)》中,虽然没有“数感”和“数感教学”等名词,但具体内容已经涉及数感和数感教学的某些方面。

比如,《九年义务教育全日制小学数学教学大纲(试用修订版)》在总体“教学要求”中就明确指出,“使学生获得有关整数、小数、分数、百分数和比例的基础知识;常见的一些数量关系和解答应用题的方法。使学生能够正确地进行整数、小数、分数的四则运算,对于其中一些基本的计算,要达到一定的熟练程度,并逐步做到计算方法合理、灵活”。

2. 数学课程标准(实验稿)中的数感

2001年我国颁布的《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》指出,“数学课程的学习,强调学生的数学活动,应发展学生的数感”,要求,“理解数的意义;能用多种方法来表示数;能在具体的情境中把握数的相对大小关系;能用数来表达和交流信息;能为解决问题而选择适当的算法;能估计运算的结果,并对结果的合理性做出解释”。

教学中的要求:应通过解决实际问题进一步培养学生的数感,增进学生对运算意义的理解;应重视口算,加强估算,鼓励算法多样化;应使学生经历从实际问题中抽象出数量关系,并运用所学知识解决问题的过程;应避免繁杂的运算。

3. 数学课程标准(2011年版)中的数感

2012年年初我国颁布的《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出,“数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义,理解或表述具体情境中的数量关系”。同时,《义务教育数学课程标准(2011年版)》从知识技能、数学思考、问题解决和情感态度四个方面对数感学习做了要求。

拓展阅读

过去,人们对数感内涵的认识较多强调直觉、感知、潜意识、经验等方面,在教学中教师也常常有虚无缥缈之感,找不到教学支点。《义务教育数学课程标准(2011年版)》将数感表述为感悟,揭示了这一概念的双重属性:既有



“感”，如感知，又有“悟”，如悟性、领悟。“感”是外界刺激作用于主体而产生的，是通过肢体感知（如感官等）而不是通过大脑思维，它含有原始的、经验性的成分。“悟”是主体自身的，是通过大脑思维而产生的，因此数感是可以通过后天培养而加强的。感悟的产生既通过肢体又通过大脑，因此，它既有感知的成分又有思维的成分。^①

● 第一学段（1~3 年级）

在“知识技能”方面要求，“经历从日常生活中抽象出数的过程，理解万以内数的意义，初步认识分数和小数；理解常见的量；体会四则运算的意义，掌握必要的运算技能，能准确进行运算；在具体情境中，能选择适当的单位进行简单的估算”。

在“数学思考”方面要求，“在运用数及适当的度量单位描述现实生活中的简单现象，以及对运算结果进行估计的过程中，发展数感”。

在“问题解决”方面要求，“能在教师的指导下，从日常生活中发现和提出简单的数学问题，并尝试解决；了解分析问题和解决问题的一些基本方法，知道同一个问题可以有不同的解决方法；体验与他人合作交流解决问题的过程”。

在“情感态度”方面要求，“对身边与数学有关的事物有好奇心，能参与数学活动；在他人帮助下，感受数学活动的成功，能尝试克服困难；了解数学可以描述生活中的一些现象，感受数学与生活有密切联系”。

● 第二学段（4~6 年级）

在“知识技能”方面要求，“体验从具体情境中抽象出数的过程，认识万以上的数；理解分数、小数、百分数的意义，了解负数的意义；掌握必要的运算技能；理解估算的意义；能用方程表示简单的数量关系，能解简单的方程”。

在“数学思考”方面要求，“初步形成数感；进一步认识到数据中蕴藏着信息，发展数据分析观念”。

在“问题解决”方面要求，“尝试从日常生活中发现并提出简单的数学问题，并运用一些知识加以解决；能探索分析和解决简单问题的有效方法，了解解决问题方法的多样性”。

在“情感态度”方面要求，“愿意了解社会生活中与数学相关的信息，主动参与数学学习活动；在运用数学知识和方法解决问题的过程中，认识数学的价值”。

^① 黄翔．数学课程标准中的十个核心概念 [J]．数学教育学报，2012（4）：16-19．本书做了适当修改。



1.2.3 数学课程中数感给我们的启示

1. 与时俱进把握数感的教学要求

由于科学技术的迅速发展,社会对人的素质要求发生了变化,相应的,社会对学生应该具备的数感也提出了新的要求。仔细分析美国和中国数学课程中“数与运算”内容要求的变化,我们发现课程设计者们对数感的认识和教学要求正在悄悄地发生变化,具体表现在以下方面。

- 对数运算技能的要求有所降低,强调对数含义的理解,重视学生用自己的方式从多个角度(如物体的、图形的、生活实例的角度)理解和表征数;
- 对奇数、偶数、质数、合数、整除特征等概念有所弱化,强调对基数(用此数作为单位来衡量其他数的大小)、序数(比如9不仅表示一个集合中有九个个体,也可以表示第九个个体)和数位(不同数位上的数字的具体含义,不同数位上的数字的换算关系)的理解;
- 弱化对数运算规律和法则的记忆与操作,强化学生在问题解决过程中通过合情推理、合理猜想来发现各种运算规律,并用适当的方式解释其正确性;
- 强调学习方式的多样化,重视学生从数学的角度思考问题,并用数学的语言进行交流,强调学生数学学习的情感、态度和价值观的变化,培养学生学习数学的兴趣,让学生喜欢数学、爱学数学。

2. 强调数感在数学理解中的作用

只有真正理解数学及其应用,学生才能更好地学习数学。首先,儿童最初的数学推理和表征都是关于数字方面的,而数感的发展有助于儿童灵活地推理和多角度地表征数学。其次,具备良好数感的儿童善于探索数字间的关系,敢于进行合理的猜想和判断,更能够发现数学的规律和奥秘,并能从小养成对数学的兴趣和爱好。再次,具有良好数感的儿童是自信的数学使用者和有效的问题解决者。

3. 重视在问题解决的过程中发展数感

小学数学教育特别重视问题解决在数学学习中的作用,主张通过对问题解决的探讨理解数学内容。只有置身于丰富多彩的数学问题解决活动中,学生才能发展数感、理解数学。因此,小学数学教学可以用数数、心算、估算、推理等问题解决方式培养学生的数感,让学生在多样性的问题解决活动中发现数及运算的规律,进而培养学生处理问题的判断力和洞察力。



1.3 培养数感的教学建议

数感教学是小学数学教学的重难点，主要表现在：既要重视直观经验，联系实际生活，以活动的方式开展，突出解决实际问题的多样性与灵活性；又要重视理性的思考，联系数学学科，重视数学知识的趣味性，突出解决数学问题的规律性。目前尚未发现培养学生数感的公认的有效方法，但下面这些教学建议值得我们参考。



1.3.1 重视对数的含义的理解

理解数的含义即建立数的概念，是形成数感最基础的一步，包括四个方面的内容：（1）建立数与实际生活的联系，使抽象的数具体化，这就是利用具体事物和自己的经历赋予数具体的含义，用自己独特的方式理解和表征数；（2）理解数值、数位，理解十进制计数规则，理解相同数字在不同数位上的不同含义；（3）用多种方式表征数，能判断两个数的相对大小，并在此基础上进行简单的推理；（4）理解与表征数的个性化、多样化，用自己的语言来表述数，用数来描述现实世界中的数量关系。

小学低年级学生对“多少”的感悟，需要教师在教学中为他们提供丰富的数学情境，引导他们通过观察来感悟量的多少，促进他们数感的发展。“数数”，是学习用数表示多少的第一步。用自然数表示多少，先用较小的数表示少量物体的集合中物体的多少，再用较大的数表示较大量物体的集合中物体的多少。通过数数，学生认识到按照不同的顺序“计数”，其结果不变，而且下一个物体所用的数比上一个物体所用的数多一；一个物体集合中最后一个物体的数也是表示该物体集合中物体多少的数。

在小学数学教学中，学生最难理解的是分数。分数有两个作用：一个是作为在运算中产生的一种数，它表示两个整数的商，能和其他的数一样参与运算；另一个是以比例形式出现的数，也可用来表示多少，它代表一个事物的一部分。

对分数意义的理解更需要实际背景的支持。例如，一本书的“ $\frac{1}{2}$ ”与一个篮球场的“ $\frac{1}{2}$ ”；一个梨的“ $\frac{1}{2}$ ”与一筐梨的“ $\frac{1}{2}$ ”。它们作为分数讨论时是等价的，但它们所代表的实际意义并不相同（关键在于“单位1”代表的实际意义不同）。



1.3.2 重视对运算含义的理解

在理解数含义的基础上,进行数的运算既有利于巩固对数的含义的理解,又有利于进行数的推理和思维。对运算含义的理解,不仅包括对加减乘除等运算含义和运算法则的理解,也包括对它们的相互关系及相互转化的方法的理解。此外,在发展学生精确计算能力的同时,还要发展学生的估算能力。估算能帮助学生快速判断结果的合理性,并能有效预测结果,它与精确计算相互依存、协同发展。

对运算的把握,不仅要能正确进行计算,更要能通过对运算的理解,达到理解本质相同的一类运算的目的。比如,“花瓶中插有红、白两种颜色的花16枝,其中白花7枝,红花有几枝?”“小明家的水果盘中有16个苹果,吃了7个,还剩几个?”和“姐姐今年16岁,7年前她多少岁?”“我有16个玩具,弟弟拿走了7个,还剩多少个?”的本质含义一样。学生也可能给出几种解答,如 $16 - 7 = 9$; $16 - \square = 7$; $\square + 7 = 16$ 。因此,教学的目的不仅在于教会学生解题、准确计算,更重要的是理解运算的真正含义,能用多种方法解决问题,并同自己的生活、学习相联系。

比如,在讲授“两位数减两位数的退位相减”时,可以用这样一个问题引入: $54 - 28 = ?$ 在计算时发现 $4 - 8 = ?$ 没学过,怎么办?教师重点启发学生,通过摆小木棍发现,在个位上4根去掉8根不够,让学生产生认知冲突,想到借10根。怎么借?怎么表示?从十位借1到个位,相当于10,这样个位就是14, $14 - 8 = 6$;十位 $5 - 1 - 2 = 2$;结果为26。通过摆小棒到列竖式的计算,学生经历了从“实物操作”到“符号操作”的过程,理解了退位相减的运算实质(如图1-3-1和图1-3-2所示)。

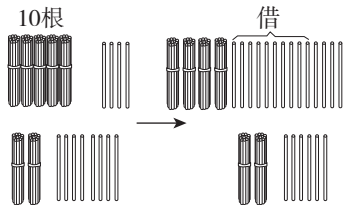


图 1-3-1

十位	个位
5	4
-2	8
2	6

图 1-3-2



1.3.3 联系实际生活发展数感

根据学生具备的现实生活经验,教师可选取学生熟知的生活实例为背景,



创设数学情境。这样，学生通过解决与生活密切相关的问题，既能体会数学在生活中的作用，又能引发思考，在已有知识经验的基础上学习新的知识。

比如，针对一年级“10以内数”的教学内容，在认识自然数“1”时可先让学生列举一些有“1”的事物，如一个书包、一支铅笔、一个笔记本、一个小组、一盘苹果……教师引导学生讨论，几个苹果装一盘？几个人组成一个小组？这样就渗透了“1”是自然数中最小的单位，所有的数都是由若干个“1”组成的；同时渗透了“1”中有多、多中有“1”的思想，为高年级学习分数的知识打下基础。

又如，高年级学习大数时，可先让学生在课前查阅一些有关大数的资料，然后在课堂上向大家汇报：我们家去年年收入约为42300元；我们区有常住人口102345人；地球离太阳的距离是149600000 km；等等。学生通过参与数学信息的收集，获得一个自由的学习空间，在开放的信息环境中不断丰富自己对大数的认识。



1.3.4 重视使用数学语言进行表达与交流

用数学语言进行表达是影响数感形成的一个重要因素。语言与思维有着密切的关系，因此我们不能忽略语言解释在数感建立中的作用。在教学过程中，教师在注意自身的数学语言表达时，还应给学生提供更多的表达数学的机会。数感的形成和表现有丰富的渠道，可以让学生用自己的语言解释数学、用数学描述现实问题，以帮助学生厘清思路，形成更深刻的数学理解。

例如，让学生用尽可能多的方式理解 $\frac{1}{4}$ ，并用自己的话叙述出来。小学生通常会用各种各样的方式来理解 $\frac{1}{4}$ ，并解释：（1） $\frac{1}{4} = 0.25$ ；（2） $\frac{1}{4} = 25\%$ ；（3） $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \dots$ ；（4） $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{1}{2}$ 的一半， $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{1}{8}$ 的两倍；（5）一刻钟是一小时的 $\frac{1}{4}$ ；（6）将一张长方形纸对折，每一小块是原来的 $\frac{1}{2}$ ，再对折一次是原来的 $\frac{1}{4}$ ；（7）我10岁，我爸爸40岁，我的岁数是爸爸岁数的 $\frac{1}{4}$ ；（8）把一个东西平均分成4份，每一份就是原来的 $\frac{1}{4}$ ；（9） $\frac{1}{4}$ 比 $\frac{1}{3}$ 小一点，比1小得多，但比 $\frac{1}{5}$ 大；（10）如果从学校回家，先走到全程的 $\frac{1}{5}$ 处，再走到全程的 $\frac{1}{4}$ 处，后走到全程的 $\frac{1}{3}$ 处，走到家就是全程的1。



1.3.5 重视多样化的问题解决活动

问题解决（包括解决数学问题或从数学角度解决生活中的问题）是一种重要的数学活动，既有利于学生理解、运用和巩固已学的数学知识，又有利于学生发现新的规律和方法，是形成和发展数感的一种重要手段。

例如，某班有学生 46 名，每人需要买一本学习参考书，每本 12 元，大约需要多少元钱？学生可以采用不同的方法，得到不同的结果：（1）粗略估算 $50 \times 10 = 500$ ；（2）粗略估算 $45 \times 12 = 45 \times 10 + 45 \times 2 = 540$ ；（3）粗略估算 $46 \times 10 = 460$ ；（4）准确计算 $46 \times 10 + 46 \times 2 = 460 + 92 = 552$ ；（5）准确计算 $12 \times 40 + 12 \times 6 = 480 + 72 = 552$ 。

需要注意的是，我们提倡问题解决方式的多样化，并不反对问题解决方式的最优化，不同的问题解决方式体现的数学思维的含量是不一样的。

教学链接 | 学生数感发展水平的衡量^①

教师要准确把握学生数感的发展阶段和发展水平，收集有关学生数感发展状况的信息，并根据已有信息有的放矢地设计教学。为此，教师要合理评估学生的数感，通过观察、交流、对话等方式了解学生解决问题的方法和思维方式，衡量学生数感的发展水平。教师可以从以下角度，利用类似于下面的问题来衡量学生的数感发展水平，采集学生的数感发展信息。

（1）理解数的意义。比如，你觉得在 $\frac{2}{5}$ 到 $\frac{3}{5}$ 之间有多少个分数？可以用哪些方法解释 0.25 的意义？等等。

（2）能用多种方法来表示数。比如，请用 * 在数轴上标出 $\frac{1}{3}$ 所在的位置；请将长方形面积的 $\frac{1}{3}$ 涂成阴影；如图 1-3-3 所示，从正方形 ABCD 的顶点 A 出发沿着 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 回到顶点 A 就停止，请在总路程的 $\frac{1}{3}$ 处标上 *。

^① 夏小刚，曾小平．七年级学生“数感”的调查与分析：兼谈与国际比较 [J]．数学教育学报，2008（5）：44-47．本书做了适当修改。



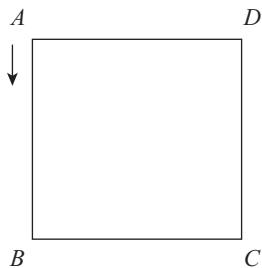


图 1-3-3

(3) 能在具体情境中把握数的相对大小关系。比如，请在你选中的序号上画“√”。①你喜欢数学吗？如果用 5、4、3、2、1 分别代表从最喜欢到最不喜欢之间的程度，你选（5，4，3，2，1）。②上面这个问题，小明选 2，说明他（A. 最喜欢数学；B. 比较喜欢数学；C. 对数学的兴趣一般；D. 不太喜欢数学；E. 最不喜欢数学）。③如果小红比较喜欢数学，她最可能选（5，4，3，2，1）。

(4) 能为解决问题选择适当的算法。比如，你认为 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{1}{2}$ 哪个大？请用多种方法说明理由。

(5) 能估计运算的结果，并对结果的合理性做出解释。比如，不用计算，分别估计一下 $736 + 182$ 和 73×18 的大概结果，并说明你是如何估算的。再如，不用计算，估计一下下面哪个算式的运算结果会大于 1。（ ）

A. $\frac{5}{11} + \frac{3}{7}$

B. $\frac{7}{15} + \frac{5}{12}$

C. $\frac{1}{2} + \frac{4}{9}$

D. $\frac{5}{9} + \frac{8}{15}$

1.4 培养数感的教学案例分析



1.4.1 教学案例介绍

教学内容：商不变的规律^①

教学目标：（1）观察算式，发现商不变的规律，并用比较规范的语言描述；（2）理解商不变的规律，并初步应用商不变的规律解决问题；（3）以商不变的

^① 吴正宪，薛铮．“商不变的规律”教学实录及反思 [J]．小学教学（数学版），2015（10）：24-27．本书做了适当修改。



规律为载体, 经历数学规律发现与运用的基本过程, 培养数学学习的兴趣。

教学难点: 归纳概括, 用比较规范的数学语言描述商不变的规律。



1.4.2 教学过程

1. 问题来自有趣的故事

师: 吴老师给你们带来了“猴王分桃”的故事。(教师边播放课件边讲述故事。随着故事的展开, 黑板上出现如图1-4-1所示的三个除法算式)

$$\begin{aligned}6 \div 3 &= 2 \\60 \div 30 &= 2 \\600 \div 300 &= 2\end{aligned}$$

图1-4-1

师: 呵呵! 笑声过后要有思考, 猴王和小猴子, 谁的笑才是聪明的笑? 为什么?

生: 猴王的笑才是聪明的笑。桃是越来越多了, 但是小猴子的数量也越来越多了, 分来分去每只小猴子得到的还是2个桃。

生: 我看到算式里的商都是2, 6除以3等于2, 60除以30也等于2, 600除以300还是等于2。所以每只猴子分到的桃都是2个。猴王真聪明! (教室里响起了热烈的掌声)

师: 是啊, 小猴子还以为猴王给的桃越多, 自己得到的就越多呢。可是不管怎么分, 每只小猴子得到的都是2个桃啊。看来这故事里面也藏着数学道理, 这算式说不定会告诉我们重要的数学规律呢。下面我们就一起来研究。

2. 探索来自儿童的需求

(1) 借助算式, 聚焦研究问题。

师: (指着黑板上的3个“2”) 2, 2, 2, 全是2, “2”在这组算式中叫什么? (学生齐答“商”) 这一组的商有什么特点?

生: 它们都一样。

师: 对呀, 你们发现了在这组算式中商始终没变。(板书: 商不变) 同学们, 看到“商不变”, 你有什么问题要提吗?

生: 商为什么没有变呢?

生: 再写出一些算式, 商还能不变吗?

生: 怎么就能让商不变呢?

师: 真好, 这些问题有价值, 值得研究。是啊, 被除数、除数到底怎么变化, 就能保持商不变?



(2) 利用图像，提炼算式。

师：看到这幅图（图 1-4-2），你们发现了什么信息？能讲个故事吗？

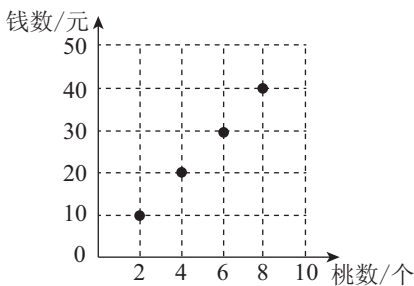


图 1-4-2

生：我看到了图里有数，横着有 2、4、6、8、10，竖着有 10、20、30、40、50。

生：这图里讲的是买桃的故事；买 2 个桃要花 10 元，买 4 个桃要花 20 元，买 6 个桃要花 30 元，买 8 个桃要花 40 元，买 10 个桃要花 50 元。

师：真好，在一幅简单的图中你们不仅看到了图里有买桃的故事，还发现了重要的数据信息。有的同学能在图中看到横线上的桃数和竖线上的钱数有关系。你们能从这样的角度观察问题，真好！

师：对这幅图，你们还有什么问题？或者还有什么新的发现吗？

生：那个点是什么意思啊？

师：问得好，谁看懂了？

（教室里安静下来，同学们无语，等待）

生：我们已经知道 2 个桃 10 元，我发现那个小点就把它们连上了。

教师频频点头，重复着学生的意思：好，这个小点就这样把 2 个桃和 10 元连起来了。在 2 个桃和 10 元之间，你还有什么新的发现？

生：2 个桃 10 元，1 个桃就是 5 元。

师：（激动地）真了不起！你看到了图里没有的东西！

生：（纷纷举起了手）2 个桃 10 元，1 个桃就是 5 元；4 个桃 20 元，1 个桃就是 5 元；6 个桃 30 元，1 个桃就是 5 元……

师：太棒了！

（黑板上出现一组算式，如图 1-4-3 所示。学生不约而同地喊了起来：商都是 5）

师：简单的一幅图，你们居然读出了这么多内容，了不起！看着这些算式，你对“商不变”有点儿感觉了吗？带着你的感觉继续观察、思考。（黑板上出现两组算式，如图 1-4-4 所示）

$$\begin{array}{l} 10 \div 2 = 5 \\ 20 \div 4 = 5 \\ 30 \div 6 = 5 \\ 40 \div 8 = 5 \\ 50 \div 10 = 5 \end{array}$$

图 1-4-3

$$\begin{array}{ll} 6 \div 3 = 2 & 10 \div 2 = 5 \\ 60 \div 30 = 2 & 20 \div 4 = 5 \\ 600 \div 300 = 2 & 40 \div 8 = 5 \end{array}$$

图 1-4-4

3. 规律来自儿童的自主发现

(1) 观察思考

师：在这两组算式中，你们一眼就看到了两组的商都没变。那么被除数、除数怎样变化，它们的商就不变呢？下面请你们自己任意选择一组观察，可以在题目上做标记，让别人一眼就看出你思考的过程。先独立思考，再小组交流。

学生独立思考，自己完成，然后小组交流，教师巡视并参与讨论。

(2) 全班汇报

第一小组汇报（如图 1-4-5 所示）。

生：我认为被除数 6 和除数 3 都乘 10，商就不变。

生：我把被除数 60 和除数 30 都乘 10，商也不变。

生：同学们对我们小组的发言有什么补充吗？

生：被除数 6 和除数 3 都乘 100，商也不变啊。

生：谢谢你的补充。

师：你们不但标得清晰，还说得特别清楚。

第二小组汇报（出现了不同的观察方法，如图 1-4-6 所示）。

生：我认为还可以反着看，被除数 20 和除数 4 都除以 2，商也不变。

该生的发言引起了大家的兴趣和思考，大家纷纷举手，补充了多种新发现……



图 1-4-5

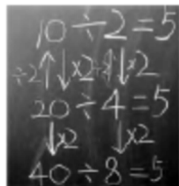


图 1-4-6

师：好极了。看来同学们在观察中发现了这两组算式中商不变的秘密。你们对商不变又有了进一步的感觉。我建议你们把这些感觉用举例子的方法表达出来，能写几组就写几组。（黑板、作业本上出现了多组算式，如图 1-4-7 所示）

(1) $8 \div 4 = 2$	(2) $24 \div 4 = 6$
$32 \div 16 = 2$	$240 \div 40 = 6$
(3) $10 \div 5 = 2$	(4) $100 \div 2 = 50$
$30 \div 15 = 2$	$500 \div 10 = 50$
$60 \div 30 = 2$	$2500 \div 50 = 50$

图 1-4-7

师：具有这样特征的算式你们写得完吗？

生：写不完。

(3) 表达规律。

师：这么多永远也写不完的一组组算式中藏着共同的规律，能不能把你发现的规律记在作业本上？（学生开始尝试着把发现的规律写出来，然后尝试着把发现的规律说出来）下面请同学们一起讨论。

生：被除数和除数都乘 10，商不变。

生：被除数和除数都乘 3，商也不变。

生：要是被除数乘几，除数也跟着乘几，商就不变。

生：被除数乘 a ，除数乘 a ，商不变。

生：这是什么意思？

生：我认为 a 代表的是同样的一个数，只要被除数乘 a ，除数也乘 a ，商就不变。

（学生们静静地观察了半分钟，渐渐地发出了感叹声，纷纷举手）

生：我听懂了他的意思，这里面的 a 就是代表相同的数，只要被除数乘的数和除数乘的数一样，商就不变。

师：看来你们真的读懂了。一个简单的乘 a 管住了那么多算式。数学表达就是这样简洁。你们发现的除法算式中的规律就叫作商不变的规律。

师：书上还有大专家们总结的商不变的规律，打开书看看，能读懂吗？

生：我不明白书上为什么要说 0 除外。

师：你的问题提得好，有同学能回答吗？（没有学生回答）好，这个问题先不急，下节课我们接着讨论。

4. 解读来自对模型的应用

师：你能看着这幅图讲一个“商不变”的故事吗？（图 1-4-2 中去掉了单位，变为图 1-4-8）

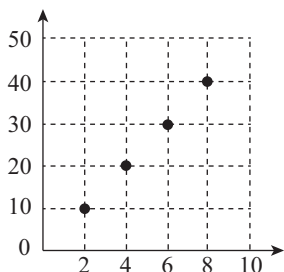


图 1-4-8

生：妈妈买苹果，买 2 个花 10 元钱，买 4 个同样的苹果花 20 元钱，买 6 个花 30 元钱，买 8 个花 40 元钱。你们猜猜 1 个苹果多少钱。

师：不买苹果了，还有其他的故事吗？

生：妈妈买 2 本书 10 元钱，买 4 本书 20 元钱，买 6 本书 30 元钱，买 8 本书 40 元钱。每本书多少钱？

师：不买东西了，还有别的故事吗？

.....

师：这样的故事编得完吗？

生：编不完。

师：细心的同学一定会发现这种现象就在我们的生活中，回去把故事讲给你们的朋友听。



1.4.3 案例点评

这是一节培养和发展学生数感的优秀课例，具体表现在以下几个方面。

1. 经历商不变规律的发现过程

学生的数感表现在对数的规律与运算结果的预测上。通过对图 1-4-1 至图 1-4-4 中数的特征与运算结果的观察，学生发现了运算结果不变的规律，并用语言进行了比较准确的描述。比如，“被除数和除数都乘 10，商不变”“被除数和除数都乘 3，商也不变”“要是被除数乘几，除数也跟着乘几，商就不变”“被除数乘 a ，除数乘 a ，商不变”。最后，书中呈现“被除数和除数同时乘或者除以一个不等于零的数，商不变”。学生通过观察、讨论，总结出商不变规律。

2. 建立商不变规律与生活的联系

教师创设“猴王分桃”的故事情境引入除法算式，请学生结合生活实际说一说图 1-4-2 表示的实际意义、用图 1-4-8 讲述生活故事，让学生体会商不



变性质在生活中广泛存在。这样就构建了数学规律与实际生活的密切联系，有助于学生更好地理解数学，发现变中不变的规律。

3. 关注数学学习兴趣的培养

兴趣是最好的老师，喜欢数学才能学好数学。根据小学生活泼好动、好奇心强的特点，教师用生动的故事引起学生的认知冲突，让学生观察不同的算式并发现规律，用自己的话描述规律，利用数学规律解释生活中的典型事件，等等。一系列活动极大地鼓舞了学生学习数学的积极性，让学生快乐地学习数学，促进学生个性化地活泼成长。

本章参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2011年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012.
- [2] 全美数学教师理事会. 美国学校数学教育的原则和标准[M]. 蔡金法，等译. 北京：人民教育出版社，2004.
- [3] 史宁中，吕世虎. 对数感及其教学的思考[J]. 数学教育学报，2006（2）.
- [4] 郑毓信. “数感”“符号感”与其它：《课程标准》大家谈[J]. 数学教育学报，2002（3）.
- [5] 叶蓓蓓. 对数感的再认识与思考[J]. 数学教育学报，2004（2）.
- [6] 马云鹏，史炳星. 认识数感与发展数感[J]. 数学教育学报，2002（2）.