

目 录

第一部分 总论

绪 论	2
第一章 数学的意义与价值	8
第一节 数学：推动社会发展的动力	10
第二节 数学：人类文明发展的源泉	14
第三节 数学：公民的基本素养	19
第二章 中学数学教学发展概论	25
第一节 数学教育从以传统为主向现代发展的过渡阶段	27
第二节 数学教育的精英教育发展阶段	39
第三节 以大众教育为目标的多元化发展阶段	45

第二部分 数学教学基础研究

第三章 中学数学的逻辑基础	60
第一节 概念	61
第二节 命题	71
第三节 推理	80
第四节 证明	88
第四章 中学数学的思想方法	96
第一节 数学思想方法概述	97
第二节 数学发展中体现的思想方法	104
第三节 中学数学常用的几种思想方法	111



第五章 数学思维与数学能力	123
第一节 数学思维	124
第二节 数学能力	140
第六章 中学生数学学习	150
第一节 数学学习中的认知结构	151
第二节 数学学习的迁移	157
第三节 数学概念、命题与问题解决的学习	160
第七章 数学教学原则	178
第一节 教学原则概述	179
第二节 数学教学的一般性原则	181
第三节 数学教学的学科性原则	191
第八章 中学数学教学模式与方法	203
第一节 中学数学教学模式	205
第二节 中学数学教学方法	215
第九章 中学生数学基本活动经验	226
第一节 数学基本活动经验的提出	227
第二节 数学基本活动经验的内涵与结构	231
第三节 促进学生数学基本活动经验积累的教学策略	245
第十章 中学数学教学内容的理解与把握	257
第一节 运算	258
第二节 函数	271
第三节 几何	280
第四节 统计概率	287

第三部分 数学教学实践研究

第十一章 中学数学教学设计	300
第一节 教学设计与数学教学设计	301
第二节 数学教学设计的主要内容	305
第三节 不同课型的教学设计	324
第十二章 数学课堂教学的实施	341
第一节 数学课堂教学的主要环节	342

第二节 数学课堂教学应处理好的几组关系	368
第十三章 信息技术与数学教学的整合	380
第一节 信息技术与数学教学整合的理论基础	381
第二节 教师和学生的技术素养对数学教学的积极影响	387
第三节 信息技术与数学教学整合的问题与对策	401
第十四章 中学数学学与教的评价	405
第一节 对学生学习的评价	406
第二节 对教师教学的评价	432
后记 数学教师的专业发展	445

第一部分 总论

绪 论

“中学数学教学研究”作为大学本科生的一门必修课程，给打算未来成为数学教师的读者们呈现必备的基础知识和应具备的能力要求。在开始了解和掌握这些内容之前，我们先就中学数学教学中涉及的几个基本问题和主要特点作一简要论述。

一、中学数学教学的基本问题

中学数学教学不是简简单单的像看上去那样的教师教、学生学的过程，在这个过程的背后，还有很多深刻的、细致的东西需要每位教师和准教师去研究、思考。早在二十多年前，我国老一辈数学教育工作者就提出了数学教育教学值得研究的几个基本问题，即“为什么教”“教什么”“如何教”^①。随着时代的发展、数学教育教学理论研究的深入，在数学教学中人们逐渐认识到还有一些基本的问题同样很重要，也值得关注，那就是“教的是什么？”——学科教师对本学科的基本认识和“教的如何？”——对教师教与学生学的评价。这几个问题结合起来即构成了当今数学教育教学中的五个基本问题。作为一名数学教师，手拿数学教科书，为了更好地开展数学教学，这几个问题是值得我们很好地思考和回答的。即

- ☆ 数学学科的本质和意义（教的是什么？）
- ☆ 数学教育的目的和意义（为什么教？）
- ☆ 教学内容的认识与理解（教什么？）
- ☆ 教学内容的组织与讲授（如何教？）
- ☆ 对教师教与学生学的评价（教得如何？）

这本教材实际上也主要是围绕这些问题展开的。那么如何理解这些问题的重要性？为什么数学教师必须回答这些问题呢？

1. 数学学科的本质和意义（教的是什么？）

作为数学教师，必须思考和逐渐弄清楚你所讲授的这门学科的本质是什么？它的意义和价值如何？事实上，任何一门学科的教师都应该搞清楚所教学科的本

^① 曹才翰. 中学数学教学概论[M]. 北京：北京师范大学出版社，1990：作者的话.



质和意义,也就是所谓的“学科观”。“学科观”是教师对所教学科的基本看法和认识,是对学科内涵的理解,包括对学科的价值和本质的认识,也包括教师具备的学科信念,即对学科的历史意义和社会地位等问题的回答。教师对他所教学科的基本认识影响着其学科教学价值的取向和态度,从更高的层次上来看,学科观也是哲学观、价值观等在学科上的具体体现。教师的学科观在很大程度上决定着教师从事学科教学的具体行为及其效果。

对于数学学科而言,只有认识了“教的是什么”,教师才能真正在教学中自觉地、有意识地把他对这门学科的认识与理解通过不同的方式传递给学生。数学教育除了具体知识与技能的教学,更重要的是数学思维方式与数学精神的教学。这就需要教师对数学的实质与精神,对数学思维的特征等有科学的认识。即使是具体的数学知识与技能,其教学也需要在更高的观点和更广泛的视角下进行,才能准确地把握其数学实质,取得良好的教学效果。尤其是在现代数学迅猛发展的形势下,更加需要我们的教育工作者提高自身的数学素养,包括对数学学科全面的、整体的了解。

2. 数学教育的目的和意义(为什么教?)

在充分认识了数学学科的意义与价值后,我们接下来面对的问题就是数学有怎样的教育功能?因为作为数学教师,你总是要面对学生向你的提问:

“我们为什么要学习数学?”

“学习数学就是为了考试吗?”

“学习数学对我将来的工作和生活有用吗?”

等等,你该如何回答这些问题呢?

刘应明院士曾经说过:“学习数学,不仅为学习其他学科打下坚实的基础,而且能够培养人们不迷信权威,不感情用事,不停留于表面现象的思维品质,甚至从数学这无声的音乐、无形的图画中,领略到美的崇高境界。”^①此外,由于数学在当今社会已经渗透到科技、经济、文化、日常生活等各个领域,数学素养已经成为一个公民素养的重要成分,能够用数学的眼光看待世界、看待周围的事物,用数学的思维方式帮助人们分析和解决问题,已经成为当代公民的基本素养。

在回答“为什么教”的问题中实际上已经蕴含了数学教育的目的。为了公民更好生存的需要、为了适应社会发展的需要,学生在知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观等方面的发展成为数学教育目的的主要内涵。

^① 张奠宙,宋乃庆. 数学教育概论[M]. 北京:高等教育出版社,2004:序一.



3. 教学内容的认识与理解(教什么?)

从传统意义上讲,人们对数学教学内容的理解是指对数学学科中特定事实,包括数学概念、命题、原理、方法、问题与结论等的理解。然而,随着我们对数学教育价值认识的发展,还应把数学学习活动及经验也包含于数学教学的内容之中。

一些教师会认为课程标准中或教科书中已经规定好了教学内容,或“中考”“高考”中涉及的内容,我们只要对这些数学概念、命题等教学内容有正确的认识即可。事实上这些认识都是片面的,作为数学教师还应该对教学内容的选择有正确的认识,只有这样,我们才能在教学内容的组织和实施过程中更好地把握这些内容。

课程内容是根据特定的教育价值观及相应的课程目标来选择的。《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称《标准(2011年版)》)指出:“课程内容要反映社会的需要、数学的特点,要符合学生的认知规律。”这阐明了数学课程内容选择的依据。这不仅适用于课程设计,也适用于教师在实施课程时对教学内容的自主选择。

《标准(2011年版)》进一步指出:“数学课程内容不仅包括数学的结果,也包括数学结果的形成过程和蕴含的数学思想方法。课程内容的选择要贴近学生的实际,有利于学生体验与理解、思考与探索。”这些课程理念对我们理解和选择教学内容具有重要的指导意义,数学教学内容的选择不仅仅是具体的、客观的数学结论,同样包括在形成这些结论的数学活动过程中的经验习得;不仅包括显性形态的数学事实,还要包括隐性形态的数学思想及方法。

4. 教学内容的组织与讲授(怎么教?)

如何组织和教授教学内容是数学教学中又一个重要的环节。“怎么教”的问题包含了教学过程的三要素:教学内容、讲授者和学习者。

有效的教学活动是学生学与教师教的统一,学生是学习的主体,教师是学习的组织者、引导者与合作者。《标准(2011年版)》指出:“教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础,面向全体学生,注重启发式和因材施教。教师要发挥主导作用,处理好讲授与学生自主学习的关系,引导学生独立思考、主动探索、合作交流,使学生理解和掌握基本的数学知识与技能,体会和运用数学思想和方法,获得基本的数学活动经验。”

关于课程内容的组织,既要体现学科的特点,又要关注教学目标的实现。因此,《标准(2011年版)》特别提出处理好“三个关系”:“要重视过程,处理好过程与结果的关系;要重视直观,处理好直观与抽象的关系;要重视直接经验,处理好直接经验与间接经验的关系。”



在教学过程中,选择怎样的教学方式和方法?如何导入教学内容?如何展现教学内容的生成过程?如何处理好预设与生成的关系?如何对学生的表现进行恰当的评价?等等。教学过程是教师体现教学智慧的过程,教师对教育目标的理解、对教学内容的理解和把握、对学生的了解等都将要在课堂教学中展现出来。

5. 对教师教和学生学的评价(教得如何?)

如何对教师的教和学生的学进行评价实际上反映了教学理念的本质问题。以学生的考试成绩作为评价的主要甚至全部依据正在得到扭转。

“关注对教学过程的评价和对教师成长的评价”是对教师教学评价的核心,即对教师教学评价是为了促进教学设计成果的优化和促进数学教师的专业发展。

对教师教学评价的内容包括很多方面,如对教师教学设计的评价、教学过程的评价、教学反思的评价等等。数学教学设计一般包括教学目标、重难点的确定,教学方法的选择和教学内容的设计,以及教学过程及其组织的设计等。教学目标、重难点的确定和教学方法的选择既要符合课程标准的要求,又要适应学生的认知基础,因此是有效完成教学任务的重要保证。对教学过程的评价,要关注教学目标是否切实在教学中得以实现;要关注是否体现了学生在学习活动中的主体地位,如教师是否为学生搭建了探究的平台、是否关注学生对知识的理解、学生是否积极参与;评价中还要关注教学方法的选择是否恰当,多媒体的选用是否得当;关注教师的提问是否有层次、有价值,是否体现对不同学生的不同要求;评价中要关注课堂检测内容是否有针对性,等等。

对学生数学学习的评价是指根据课程目标的要求,按一定计划采取特定的方式收集和获取学生数学学习的信息,并对学生数学学习的状况作出结论的过程。^①它的功能可以概括为以下几点:(1)及时反馈学习信息,诊断学生在学习中遇到的问题;(2)帮助学生形成正确的学习预期,激励学生的学习积极性;(3)根据学生的学习状况,对教学适时地进行调控和改进,以取得更好的教学效果。

为了更好地实现评价的作用,《标准(2011年版)》指出:“应建立评价目标多元、评价方法多样的评价体系。”评价“目标多元”是学生在知识与技能、过程与方法、情感态度价值观等三个维度的课程目标都获得发展的基本要求。结合具体的评价内容,形成多角度、多层次、多维度的评价点,通过评价全面反映学生的学习情况,并产生有利于学生全面而有个性发展的积极导向作用。评价“方法多样”是针对多样化的学习方式和学习需求而形成的多种多样的评价方式。

正如前面谈到的数学教学内容的组织要处理好“过程与结果的关系”,对学生数学学习的评价也要处理好两者的关系,而且要体现对学生全面发展的要求。

^① 史宁中. 义务教育数学课程标准解读[M]. 北京:北京师范大学出版社, 2012.



《标准（2011年版）》指出：“评价既要关注学生学习的结果，也要重视学习的过程；既要关注学生数学学习的水平，也要重视学生在数学活动中所表现出来的情感与态度，帮助学生认识自我、建立信心。”

二、中学数学教学的基本特点

概括起来，无论是中学数学教学的实践还是中学数学教学的研究，都应体现以下几个特点。

1. 科学性

第一，中学数学教学应该遵循一般的教学规律。对一般教学规律的研究即是教学论的主要内容之一，虽然在学术界有教学论是科学还是艺术的争论，但教学论的科学性是毋庸置疑的，因而中学数学教学应该具有很强的科学性。

第二，中学数学教学应符合中学生的学习和认知规律。研究和遵循学生的学习特点、心理特征、认知规律，是顺利有效地开展数学教学的基础和保障。数学学习是一个特殊的认知过程，数学教学应该以教育学、心理学理论为基础，结合数学学习的特点，形成数学教学的基本理论。

第三，中学数学教学还应同时考虑数学学科的特点，结合学生的认知水平来适当地体现数学的抽象性、逻辑的严谨性，同时，注意数学课程内容的系统性、结构性。

2. 发展性

中学数学教学的发展性体现在以下几个方面。

第一，中学数学教学的理论与实践是随着时代的发展、社会的进步以及它们对教育教学不断提出的新要求而不断发展变化的。比如，中学数学教学的目标、内容受到社会的政治、经济、文化等因素的影响，同时还受到教育学理论、心理学理论的研究成果的指导，当然，也会随着数学学科自身的发展而有所改变。因此，中学数学教学会在这些因素的影响下不断发展。

第二，数学教育教学的一般规律是客观存在的，但对规律的认识是多角度的、多层次的。同时，数学教学的过程是一个复杂的过程，无论是教学内容、教学方式还是教学对象，单个元素的复杂性以及将它们组合起来的更加复杂的系统，都决定了对数学教学认识与理解的不断深化和发展。

第三，数学学科的发展、信息技术以及其他一些相关科学的发展，也对中学数学教学产生一定的影响。数学理论的发展在某种程度上带来了数学教学内容变化，数学学科在社会各个领域的广泛应用，以及人们对数学教育的价值和功能的认识的不断深化，也将对数学教学的关注点带来变化。信息技术对数学教学的影响是很大的，而且可以预计，随着信息技术的发展，它还必将在更大的程度上



影响数学教学。

3. 艺术性

教学是艺术，因为教学是具有创造性的活动过程。

数学教学同样具有创造性的特征，这种创造性主要体现在数学教师对教材的创造性加工和对教学方法和教学手段的创造性运用。许多教师一辈子教了几十年书，同一年级、同一课题上了不知多少遍，但很难找到两节完全一样的课。

数学教师教学活动的创造性是由数学教育教学发展的规律性决定的。教学过程的基本因素包括学生、教师和教材，人的差异性使教学活动呈现多样性、教学活动具有创造性的首要因素。教师通过对学生的了解、把握，并通过自己科学的、创造性的加工，使之转化为教学行为。

数学教学过程的创造性水平与教师的素养和教学经验相关。教师对学生认知结构现状的了解、对课程内容的把握、对教材设计意图的理解等都能对教师的教学设计或教学实施产生影响。

教师的教学艺术一方面表现在创造性的教学设计上，另一方面还体现在教学的具体环节，如课题引入的艺术、提问的艺术、讲解的艺术等，这中间表现出数学教师语言的艺术、板书的艺术、肢体动作的艺术水平和能力。

数学教学的艺术性还体现在教师对课堂教学过程中生成的教学资源的态度和处理上，如何抓住有意义的、有助于学生理解的生长点？如何既不伤害学生的学习积极性又不浪费大家时间的婉言回答？如何引导学生想得更多更深远？等等，教师的教学艺术尽显其中。

第一章

数学的意义与价值

本章概览

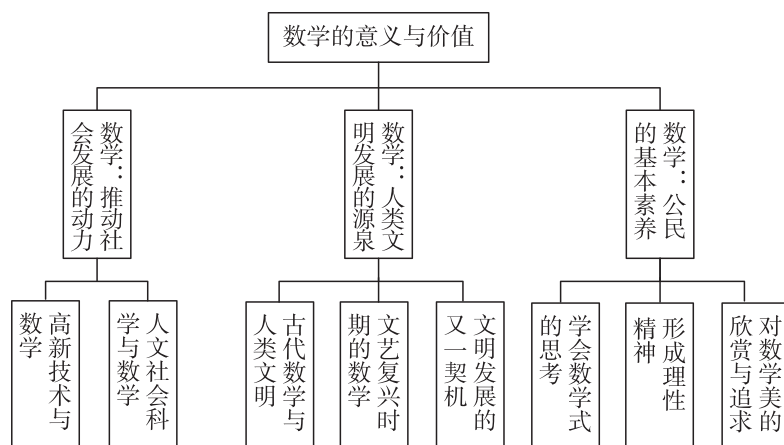
本章通过较为丰富的实例试图来阐释数学在推动社会发展、促进人类文明进步和提升公民素养等方面的重要作用。

首先，数学在科学技术发展中发挥着重要的作用，尤其是当今社会，数学已经成为高新技术的基础；同时数学的定量刻画特点使其在人文社会科学的发展中也扮演越来越重要的角色。

其次，数学在人类文明的发展中始终相伴相随，从古代埃及、希腊等文明的发源到文艺复兴时期的兴盛，直到近现代人类文明的进步，数学在其中起到了不可替代的作用。

再次，随着时代的发展，数学在社会的各个领域的应用越来越广泛和深入，对公民素养也提出了新的要求，数学素养成为公民一般素养的重要组成部分。

知识结构图



学习目标

1. 结合数学发展的历史，了解数学在人类社会发展中的作用。
2. 结合实例，体会数学是当今高新技术的基础，了解数学在人文社会科学中发挥的作用。
3. 结合历史事实，了解数学在人类文明发展中发挥的作用。
4. 结合自己生活经历并了解周围人的感受，体会数学素养是公民素养的重要组成部分。

作为一名数学教师，常常会面对学生们提出的问题：“我们为什么要学数学？”“学数学到底有什么用？”，尤其是当有些教师的数学教学演变成空洞的解题训练时。要回答这些问题，数学教师不仅要正确认识数学教育、数学教学，而且还必须科学、全面地认识数学学科的意义与价值。当然，对于这个问题的回答，包括了对“数学是什么”的理解，因此不是那么容易的。很多大数学家从不同的角度阐述过这个问题，让我们先来看看他们的观点。

M. 克莱因（M. Kline，1908—1992）在《西方文化中的数学》中提到，“由于受学校教育的影响，一般人认为数学仅仅是对科学家、工程师，或许还有金融家有的一系列技巧。这样的教育导致了一些人对这门学科的厌恶和对它的忽视”。“数学并不是一系列的技巧，这些技巧只不过是它微不足道的一方面：它们远不能代表数学，就如同调配颜色远不能当作绘画一样。技巧是将数学的激情、推理、美和深刻的内涵剥离后的产物。如果我们对数学的本质有一定的了解，就会认识到数学在形成现代生活和思想中起重要作用这一断言并不是天方夜谭。”^①

那么到底应该怎样理解数学的本质呢？

R. 柯朗（R. Courant，1888—1972）在他的著名的《数学是什么——对思想和方法的基本研究》一书中提到，“数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美境界的追求。它的基本要素是逻辑和直观、分析和构作、一般性和个别性。虽然不同的传统可以强调不同的侧面，然而正是这些互相对立的力量相互作用以及它们综合起来的努力才构成了数学科学的生命、用途和它的崇高价值。”^②

从公元前 5 世纪至 4 世纪，数学作为现代意义上的一门科学在古希腊诞

^① M. 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 2.

^② R. 柯朗, H. 罗宾, 斯图尔特. 什么是数学: 对思想和方法的基本研究[M]. 左平, 张饴慈, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 1.



生，数学的研究也在古希腊体现出公理演绎的逻辑特征，欧几里得（Euclid，前 330—前 275）的《几何原本》是逻辑演绎的典范。然而，与现实世界的联系及应用是数学的另一个显著特点。

在接下来的两千多年的发展中，数学一方面因社会需要而不断获得发展的动力，“商业和金融事务、航海、历法的计算，桥梁、水坝、教堂和宫殿的建造，作战武器和工事的设计，以及许多其他的人类需要，数学能对这些问题作出最完满的解决”。另一方面，数学家们对纯智力方面的好奇心和对纯思维的兴趣，或者说从数学内部提出的抽象的问题，激励他们研究数的性质和几何图形。古希腊的三大几何作图问题、圆锥曲线以及数学科学中的一些伟大成就，如射影几何、非欧几何的产生，数论的发展等等，这些都是为了解决纯智力的挑战而获得的伟大成果。

第一节 数学：推动社会发展的动力

数学因社会的发展需要而发展，因而也必将对社会的发展起到重要的推动作用，从古到今，数学在社会发展中的应用价值越来越得到充分的体现。

19 世纪末，恩格斯（F. Engels，1820—1895）对数学在社会各个领域中的应用有过这样的描述：“在固体力学中绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中已经比较困难了，在物理学中多半是尝试性的，在化学中是最简单的一次方程式，在生物学中等于零。”然而，随着时代的发展和数学的发展，数学在社会各领域中的应用突飞猛进，华罗庚先生于 1959 年 5 月在《人民日报》上发表《大哉数学之为用》的文章，其中对此进行了精彩的叙述，“宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁，无处不用数学”。

一、高新技术与数学

20 世纪 20 年代，毛泽东同志有句名言，“枪杆子里面出政权”，半个世纪后，邓小平同志提出“科学技术是第一生产力”。美国的科学院院士 J. G. Glimm 借用中国的名言指出，从 90 年代^①起，在全球应该是“科学技术出政权”。当今世界各国间的竞争主要体现在高新技术的竞争。“高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学”。因此，一个国家在国际上的竞争力以及地位、国家昌盛

^① 指 20 世纪 90 年代，作者注。



与富强，与数学有着密切的联系。

计算机的出现为数学的应用插上了翅膀，可以使它飞得更高更远。“当今的数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术：从航天到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。因而今日的数学兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。”^①

当代科学技术的突出特点就是量化。而数学为量化的研究刻画问题提供了有力的工具。人们在许多领域如工程的设计规划，产品的生产、运输、销售、维修等，都需要对其中的与大小、位置、时间、速度等有关的数量进行精确的计算。这样的例子数不胜数，在工业、经济、军事国防、医学、环境、航空航天等领域都有充分的体现。

例如，在飞机制造业中广泛应用到数学。设计师在考虑飞机的结构强度与稳定性时，需要用到稳定元来分析，而机翼的震动情况则需要解特征值问题；为了使飞机省油与提高速度，必须设计一种最佳机翼和整个机体的形状；如何为飞行员选择最优控制参数，也是必须考虑的问题……这些问题都在很大程度上以计算为基础。另外，数学模型已代替了飞机设计中的风洞试验，其适用性、安全性、经济性等体现了极大的优越性。

问题情境1.1

CT是当前很多大型医院为患者进行诊断和检查的重要工具和手段之一，那么CT成像与过去的X射线透视有什么不同？你认为这与数学有关系吗？

X射线计算机层析摄影仪（简称CT）是20世纪医学中的奇迹。1979年的诺贝尔生理学或医学奖授予了首创CT理论的美国科学家柯马克（A. M. Cormack, 1924—1988）和英国科学家洪斯菲尔德（G. N. Hounsfield, 1919—2004），以奖励他们取得的科学成就。

CT理论与数学又有怎样的关系呢？事实上，CT理论和CT成像的核心是数学中的一个拉东变换，由奥地利数学家J. K. A. 拉东（Radon, 1887—1956）提出，其核心思想就是根据不同的物质有不同的X射线衰减系数，而柯马克就是基于这样的属性利用拉东变换获得了对物体的直观三维图像（CT成像得到的数十张图像）。

^① 严士健. 面向21世纪的中国数学教育——数学家谈数学教育[M]. 南京：江苏教育出版社，1994：2.



拉东变换与 CT^①

1979 年柯马克和洪斯菲尔德首创了 CT 理论和第一台 CT 层析仪。事实上, X 射线层析摄影仪 (CT) 的关键技术基于数学——拉东变换。

拉东是一位奥地利数学家, 他对数学的贡献很多, 其中有一个长期以来并不显眼的成果: 拉东积分变换 (1917 年发表)。事实上, 不同物质有不同的 X 射线衰减系数, 进行一般的 X 光照射, 我们所看到的是人体的直线上的 X 射线经过衰减之后的总结果, 是衰减系数的平均值 (这是一积分, 形象一点说, 其明暗程度表明了积分值的大小), 而这一衰减的过程, 特别是在人体各部分衰减系数的分布则不得而知。如果能知道这一分布而且能通过相应的仪器反映这一分布, 我们就能获得对物体的直观三维图像。柯马克设想的 CT 就是企图遵循衰减过程的反方向, 借助拉东变换的理论和方法, 探究如何通过这些积分值 (衰减结果), 来求出被积函数 (衰减系数的分布)。柯马克以拉东变换为核心建立了 CT 理论, 并由洪斯菲尔德于 1972 年设计出第一台商业用 CT。

受 CT 原理的启示, 20 世纪 80 年代后期兴起的磁共振显像 (MRT) 也是运用数学变换的反演来设计成功的, 其分散率更高。在这两个技术中, 本质上我们只是测量一维的度量, 然后应用数学技巧来重建三维图像, 更近的 PET 扫描, 即正电子发射层面 X 光照相术, 也是利用这一相同的技术发展而成, 它可以测出新陈代谢作用以及人体结构。

拉东变换的应用已远不限于医学, 而且被应用于海洋学。它能用来测定海洋的温度, 这不仅仅是一个学术上的问题, 因为海洋的温度极大地影响陆地上的天气模式。例如, 传统的用于测量 300 平方千米这样大的区域的方法是, 把温度计从船上扔到水中, 然后船只沿格子来回行驶, 船只速度这么慢, 以致在测量完成前温度已发生了变化。然而, 利用声音发射器和探测器, 海洋学家能够测量出依赖于水温的声音波动速率。通过许多次的发射和探测后, 很快他们就有足够多的信息来使用拉东变换。

二、人文社会科学与数学

数学在社会发展中应用领域的不断扩大, 已经涵盖了人们传统意义上认为与数学相距较远的人文社会科学领域。因为一个领域如果没有以定量的方法展开其研究, 那么它的研究就是无法深入的! “一种科学只有在成功地运用数学时, 才算达到真正完善的地步。”

① 黄翔. 数学教育的价值[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 59.



数学在人文社会科学方面的应用以经济学最为突出。经济学研究商品的成本与利润、需求与供给等，这些都与数量有关。好的经济工作者不仅要有定性思维，但这还不能满足对一个经济现象或事件的大致描述，而必须能够进行定量的刻画。“今天，一位不懂数学的经济学家绝不会成为杰出的经济学家。”^①

近几十年来随着国际社会经济的迅猛发展和各种变化，数学在经济学中的应用越来越深入。一方面，推动了数理经济学特别是计量经济学的产生与发展；另一方面，经济学领域取得的重大创新性成果也离不开数学。纵观 20 世纪末期的众多诺贝尔经济学奖的获奖成果中，半数以上的获奖工作是相当数学化的，因此，虽然诺贝尔奖不包括数学，但由于数学的威力，诺贝尔奖已经无法回避数学。在经济学中，用到的数学非常广泛，有的还很精深，其中包括线性规划、几何规划、非线性规划、不动点定理、变分法、控制理论、概率论、数理统计、随机过程、矩阵论、微分方程、对策论、多值函数等。^②



近几十年与数学有关的诺贝尔经济学奖^③

1969 年，挪威的弗里希（R. Frisch，1886—1982）和荷兰的丁伯格（J. Tinbergen，1903—1944），与数学相关的研究成果是创立了经济计量学，并研制应用动态模型来分析经济过程。

1971 年，美籍俄裔的获奖者库兹涅特（S. Kuznets，1901—1985），与数学相关的研究成果是致力于经济增长和发展的统计研究，为提高数量经济研究的准确度做出了贡献。

1973 年，美国的列昂节耶夫（W. Leontief，1905—1999），与数学相关的研究成果是发明投入——产出方法，并应用于重要的经济学问题。

1975 年，苏联的康托洛维奇（L. Kantorovich）和美籍荷兰裔的库普曼斯（J. Koopmans，1910—1985），与数学相关的研究成果是创立和发展了线性规划方法，为资源最优调拨理论做出了贡献。

1980 年，美国的 M. 克莱因，与数学相关的研究成果是对经济计量模型的建立和应用做出了贡献。

① 严士健. 面向 21 世纪的中国数学教育——数学家谈数学教育[M]. 南京：江苏教育出版社，1994：5.

② 严士健. 面向 21 世纪的中国数学教育——数学家谈数学教育[M]. 南京：江苏教育出版社，1994：5-6.

③ 黄翔. 数学教育的价值[M]. 北京：高等教育出版社，2004：64.



1981年,美国的托宾(J. Tobin, 1918—2002),与数学相关的研究成果是为投资决策的数学模型研究做出贡献。1983年,美籍法裔的德伯柳(G. Debreu, 1927—2004),与数学相关的研究成果是运用抽象分析法和纯数学模型证明了市场价格一般平衡理论的存在。

1984年,英国的斯通(R. Stone, 1913—1991),与数学相关的研究成果是把不同经济部分的核算合为一个模型,用投入——产出法对其进行研究,为国民收入核算体系做出了贡献。

1985年,美国的莫迪格里尼(F. Modigliani, 1884—1920),与数学相关的研究成果是致力于凯恩斯学派的经济计量模型研究,阐明了关于公司及资本估算的定理。

1994年,美国的纳什(J. Nash, 1928—2015),与数学相关的研究成果是为对策平衡模型做出了巨大的贡献。

1995年,美国的吕卡(R. E. Lucas, 1842—1891),与数学相关的研究成果是反战和应用合理期望假设。

1997年,美国的布莱克(F. Black, 1938—1995)和舒尔莱斯(M. Scholes, 1941—),与数学相关的研究成果是提出了期权定价理论。

通过构造数学模型,将现实中的实际问题转化成数学问题,通过数学问题的解决进而得到对实际问题的解决,这已经成为当今数学应用的主要形式。数学模型广泛应用在国防与军事、资源开发与环境保护、工程的设计与制造等领域,显现出数学极大的应用价值。

第二节 数学：人类文明发展的源泉

文明是指人类所创造的精神财富的总和,如文学、艺术、教育、科学等,是人类在认识世界和改造世界的过程中所逐步形成的思想观念以及不断进化的人类本性的具体体现。文化是文明的基础,文明是文化的升华。

“数学与人类文明同样古老,有文明就必须有数学,缺乏数学就不可能有科学的文明,数学与文明同生并存以至千古。”^①

一、古代数学与人类文明

在人类的早期文明中,数学已经迈出了简单的几步。由于实际的需要,在生

① 严士健. 面向 21 世纪的中国数学教育——数学家谈数学教育[M]. 南京:江苏教育出版社, 1994: 1.



活中人们利用手指和脚趾进行计算，使物与物的交换更加简单可行。这样的计数法即使在今天也能找到它的痕迹，“digit”一词，不仅指数字“1，2，3，4，…”，而且也代表手指和脚趾。数的特殊记号的发明是古代文明的又一个标志，这样的文明已经显示出对事物的共性的认识：5只羊、5个苹果等共同的属性是5，数字就被看成是一种抽象的思想，这也是思想史上伟大的进步。而算术的加减乘除四则运算既是对实际生产中分配需求的满足，也是人类文明的一项成就。因为对于古代人类来说，把握这些运算并不是很容易的一件事情。与数系的产生一样，在古代文明中，基本的几何概念和图形面积的运算都是为了满足人们的需要而产生的。

在创造古代文明并且孕育了现代文明的民族中，古埃及、古巴比伦、古印度和古代中国以及古希腊等做出了突出的贡献，也体现了数学与人类文明发展的密切关系。

古巴比伦人发明了计数系统，而且计数方法中体现了位值制的法则，他们以60作为进制的基底，希腊人、欧洲人一直到16世纪都将这套系统运用于所有的数学计算和天文计算中。现在我们仍然以60进制作为时间、角度转换的基本进位系统，这能够看出古巴比伦人的贡献。

古埃及人在几何学方面的贡献以及对人类文明带来的影响是毋庸置疑的。有观点认为，几何学是“尼罗河的恩赐”。在公元前14世纪，塞索斯特里斯王（Sesostris）将土地分封给所有的埃及人，使他们每个人都得到一块同样大小的长方形土地，以后据此而纳税。如果一年一度的尼罗河洪水冲毁了某个人的土地，那么这个人就必须向法老报告所受的损失，由法老派人测量所失去的土地，再按相应的比例减税。埃及的几何学（geometry）就是从土地丈量中产生并发展起来的，其中的geo是土地的意思，metron表示测量。



金字塔——埃及人的几何应用

埃及人把他们的天文知识和几何知识结合起来用于建造他们的神庙，使一年里几天的阳光能以特定方式照射到庙宇里，如她们把某些庙宇修得这样，使一年中白昼最长的那天，阳光能直接进入庙宇，照亮祭坛上的神像，巴比伦人和希腊人，也在某种程度上按照这种方式确定庙宇的方向和位置，金字塔的方位也朝向天上特定的方向，而斯芬克斯（狮身人面像）的面则是朝东的。虽然这些工程的修建细节对我们无关紧要，但值得指出的是，金字塔代表埃及人对几何的另一种用法。金字塔是帝王的陵墓；因埃及人相信灵魂不灭，所以他们相信修造合适陵墓对死者的阴间生活大有影响。事实上，每个金字塔都专设一间房，供帝王和王后死后居住。他们竭力使金字塔的底有正确的形状；底和高的尺寸之比也是意义非常重大的。



如果认为埃及人和巴比伦人只是将数学应用于实际生活中,那就过于狭隘了。“在巴比伦和埃及,数学与绘画、建筑、宗教以及对自然界的探究之间的联系,在密切性和重要性方面丝毫不比数学应用于商业、农业和建筑方面逊色。”^①

古希腊数学家在数学上的贡献是独特的,对人类文明发展的推动也是巨大的。“希腊人的思想毫无疑问地受到了埃及和巴比伦的影响,但是他们创立的数学与前人的数学相比,却有着本质的区别。”“按照20世纪的观点,数学,甚至现代文明都可以说始于希腊古代时期,这个时期约从公元前600年持续到公元前300年。”^②

希腊人坚持演绎推理并运用演绎推理的方法研究数学是众所周知的。希腊人崇尚理性、热爱精神活动,因而产生了很多伟大的哲学家。他们认为埃及人和巴比伦人所积累的数学知识就是空中楼阁、用沙子砌成的房子,一触即溃。希腊人寻求建造的是根基牢固、由大理石砌成的坚不可摧的永恒的宫殿。演绎推理作为数学的特征将数学与其他学科区别开来,使数学的结论有了确定性。为了能够通过演绎推理得到一般性的结论,希腊人还努力地将数学概念等抽象化,如,几何中的点、线、角等,这些概念源于物质实体,但又高于物质实体。

欧几里得的《几何原本》是希腊人追求演绎推理的经典之作,它奠定了公理化方法的基础。希腊人开创了严谨的数学推理模式,加上一丝不苟的计算,使得数学结论不可动摇。“这种思想方法不仅培养了数学家,也有助于提高全体人民的科学文化素养,它是人类的巨大精神财富。爱因斯坦(Albert Einstein, 1879—1955)关于欧氏几何曾说:‘世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹,这个逻辑体系如此精密地一步一步推进,以致它每一个命题都是不容置疑的——我这里说的是欧几里得几何。推理的这种可赞叹的胜利,使人类的理智获得了为取得以后成就所必需的信心’。”^③

二、文艺复兴时期的数学

当人类历史来到了中世纪,让我们看看围绕数学又发生了什么?



问题情境1.2

著名画家达·芬奇(Leonardo Da Vinci, 1452—1519)的最优秀的杰作和最著名的作品之一的《最后的晚餐》,体现了怎样的数学思想和方法?

① M. 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 17.

② M. 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 23.

③ 严士健. 面向21世纪的中国数学教育——数学家谈数学教育[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1994: 7.

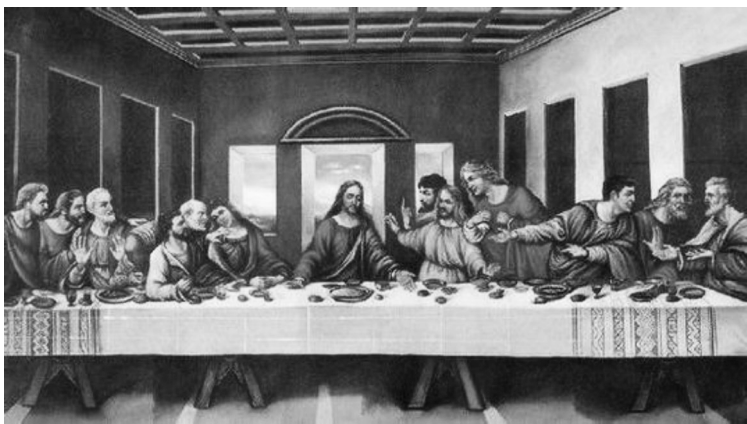


图 1-1-1 达·芬奇的《最后的晚餐》

文艺复兴时期的艺术家为了追求逼真的绘画创造，即画家如何在二维的画布上描绘现实中的三维物景，从而对数学产生了兴趣，因为处理这些理想化的物体需要的语言，物体间的大小比例以及它们之间的位置关系，都需要利用欧氏几何的知识才能完成。艺术家们通过创立一整套全新的数学透视理论体系，解决了上述的问题。

L. B. 阿尔贝蒂（Alberti，1378—1455）在他 1435 年出版的著作《论绘画》中说，做一个合格的画家，首先要精通几何学，学习这门艺术要借助于推理、掌握条理秩序，并且只有通过实践才能把握它们。达·芬奇对透视学做出了最大的贡献，他认为，绘画的目的是再现自然界，而绘画的价值就在于精确的再现。因此，绘画是一门科学，它就像所有其他科学一样，以数学为基础。“任何人类的探究活动也不能称为科学，除非这种活动通过数学表达方式和经过数学证明来开辟自己的道路。”达·芬奇十分重视以理论为基础的艺术创造，认为实践总是建立在正确的理论之上的。他将透视学看作绘画的“舵轮于准绳”。

生活在 15 世纪和 16 世纪早期的绘画大师们，几乎所有的都试图将他们的绘画中的数学原理与数学和谐、实用透视学的特殊性质和主要目的结合起来。这些绘画作品展示了精密的透视学及其表现方式的作用。

让我们来一起欣赏拉斐尔（Raffaello Sanzio，1483—1520）的“雅典学派”这幅画，它的意义不仅在于它巧夺天工地处理了空间和景深，以和谐的安排、巧妙的透视、清晰准确的比例描绘了一座神圣庄严的建筑物，而且这幅画的内容和人物也有特别的设计，表达了作者及文艺复兴时期的有识之士对希腊先祖们的敬仰之情。

在画中，“柏拉图（Plato，约前 427—前 347）和亚里士多德（Aristotle，前 384—前 322），一左一右，处于画的中心。柏拉图左边是苏格拉底（Socrates，前

469—前 399)。而在左边地上的，是正在著书立说的毕达哥拉斯（Pythagoras，约前 580~约前 500）。右边地上，则是欧几里得或阿基米德（Archimedes，前 287—前 212）蹲在那儿在证明定理。画的右边，托勒玫（Claudius Ptolemy，约 90—168）^①手中拿着一个球。整幅画中，有音乐家、数学家、文法家，群英荟萃。”^②



透视学对文艺复兴时期的绘画艺术的影响是深远的，尽管现代绘画已经摆脱了对自然界的直接描写，但是聚焦体系的原理还是在相关的艺术院校讲授，而且在绘画中仍然被广泛运用。

三、文明发展的又一契机

17 世纪微积分的产生和发展，不仅是数学发展历史上的里程碑，也是人类文明发展的一个重要契机。关于微积分产生的背景和在实际中的广泛应用以及在数学史上称为危机的微积分困境等，在此不做更多的介绍，但其中却给了人们很多的启示。

首先，微积分的产生与发展揭示了数学是如何进步的。早期的微积分的研究缺少严密的逻辑性，漏洞很多，这与“周密地进行思考，然后得到完美而无懈可击的结论”这样的数学家的正统观念发生了尖锐的冲突。但在法国数学家柯西（A. L. Cauchy，1789—1857）没有给出微积分严格的、正确的极限概念之前，微积分在物理学方面的应用已经让科学家们信心满满，因为利用微积分得到的结果

① 著名的埃及天文学家——作者注。

② M. 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 142.



在运用时是有用的、坚实可靠的。“指导牛顿（Sir Isaac Newton，1643—1727）、莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646—1716）沿着一条正确道路前进的正是直觉和物理的结论，而不是逻辑。”

其次，牛顿及其同时代人在微积分上取得的成就，“推动了人们对世界广泛的理性探索，这一探索包括社会、人类、世界的每一种生活方式、习俗”。“它还使我们的文明进入了最求真正的全知全能的时代，激发了把思想组织为建立在数学模式上的系统的愿望，而且使人们对数学和科学的力量深信不疑。17、18 世纪数学创造最伟大的历史意义是，它们为几乎渗透到所有文化分支中的理性精神注入了活力。”^①

事实上，17—18 世纪的数学的发展，尤其是微积分的广泛应用更是促进了许多数学新分支的产生和发展，如，常微分方程、变分法、微分几何等，这些分支又大大促进了数学的应用领域，同时对人类文明发展产生了巨大的影响。

第三节 数学：公民的基本素养

随着社会进步和科技的飞速发展，同时数学在社会各个领域的渗透日益深入和广泛，数学素养成为公民素养的重要组成部分。

在我们的日常生活、工作的方方面面，都无法避免和数学打交道。如，每天天气预报中用到的降水概率及表示空气污染程度的百分数和指数；个人和家庭的投资方式如购物、购房、购买股票、参加保险等所采用的具体方案策略；外出旅游中的路线选取；房屋的装修设计和装修费用估算，还有每天电视报纸等新闻媒体带给人们的各种各样的信息，这些都与数学有着密切的联系。

不同年代的两项社会需求研究显示数学与公民的工作及生活的联系。1983 年《中国经济与社会的发展对数学基础知识和技能的需要的调查研究》课题组组织全国 31 个省（自治区、直辖市）经过三年的研究^②，对 16 个大行业以及高等院校主要专业和 67 种杂志进行调查，结果显示，算术、初中的代数、几何以及高中的概率统计、向量、矩阵、微积分、空间解析几何等现代数学的内容都是很多行业和专业所需要的。这个调查为数学课程内容的确定提供了客观的依据。

1998 年，另一项为了解社会发展及其对数学的需求的调查也得出了类似的结

① M. 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 285.

② 陈宏伯. 我国初中阶段数学课程改革[J]. 课程·教材·教法, 1993 (4): 19-21.



果。^① 该项研究在对《光明日报》《工人日报》《农民日报》《参考消息》《中国教育报》《经济日报》《中国证券报》《广州日报》《甘肃日报》《北京青年报》等10余种报刊进行了调查统计之后, 结果发现大数、统计图表等越来越多地出现在公众媒体上。因此, 提高公民相应的用数学的眼光分析问题的意识和能力是时代和社会发展的要求。

一、学会数学式的思考

很多人存在这样的疑问: 学会那么多数学知识将来怎么派上用场? 是的, 可能我们学到的很多具体的数学知识(包括概念、命题、公式、法则等)没有机会用到具体的工作和生活中, 但其中蕴含的数学思想方法和数学的思维方式却会使你终身受用。

数学的思考方式包括很多方面, 计算、证明、归纳、类比、建立模型、逻辑推断等等。但概括来讲, 数学思维最基本的两大方面是定量化方法和逻辑推理。从初等的三角形面积算法到描述各种自然和社会现象的复杂方程的解算, 从简单的数据分析到现代统计推断, 定量化的方法已经深入到各行各业, 而“定量思维是指人们从实际中提炼数学问题, 抽象化为数学模型, 用数学计算求出此模型的解或近似解, 然后回到现实中进行检验, 必要时修改模型使之更切合实际, 最后编制软件包, 以便得到更广泛的方便的应用”。^② 数学运用特有的逻辑手段来组织知识, 使之系统化、条理化和严格化; 数学运用特有的逻辑证明来达到确定无疑的结论, 提供正确的标准。无论是定量化还是逻辑推理, 本质上都是通过建立适当的模型来实现的。无论从事什么行业的人, 总是难以回避运用上面提到的思维方式去思考, 因为数学的应用普遍存在! 数学为人们提供特有的、具有典范意义的思维方式, 这种思维方式对于从事各种职业的公民能在岗位上获得成功与发展都是重要的智力保障。

《标准(2011年版)》在“课程目标”的总目标中提出“运用数学的思维方式去思考”, 又在四个维度之一的“数学思考”中进一步指出, 使学生能够:

- “建立数感、符号意识和空间观念, 初步形成几何直观和运算能力, 发展形象思维与抽象思维。
- 体会统计方法的意义, 发展数据分析观念, 感受随机现象。
- 在参与观察、实验、猜想、证明、综合实践等数学活动中, 发展合情推理和演绎推理能力, 清晰地表达自己的想法。

① 刘晓玫. 社会发展对数学的需求与数学教育改革[J]. 数学教育学报, 2000(8): 58-63.

② 严士健. 面向21世纪的中国数学教育——数学家谈数学教育[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1994: 4.



- 学会独立思考，体会数学的基本思想和思维方式。”^①

这样的目标要求为我们的数学教学提供了明确的方向，即如何在数学教学中引导学生学会数学式的思考。

二、形成理性精神

数学思维的严密性和精确性特征，使数学在培养人的理性精神方面发挥着无可替代的作用。在数学中，人类的理性精神可以最大限度地体现和发挥出来，并以此来促进理性精神的发展。这是数学影响人类文化的突出方面之一。正因为如此，数学一直是传统教育的重要组成部分，并将继续成为培养有素养的现代公民和各个领域的创新人才的基础教育科目。

在数学中，任何术语都被清楚地定义和解释；证明过程都严格地合乎逻辑而不含糊；任何结论都经过严格的推理而毋庸置疑，不受任何权威意见的制约与限制；任何有悖于常理的概念和理论，只要它能对数学的发展有促进作用，就不会长期被人们所拒绝。

数学论证的严谨性使人诚服；数学的真理性使人坚信不疑；数学的演算是精确的，来不得半点马虎。正因为如此，数学无声地教育人们要尊重事实、实事求是，数学也渐渐地教会人们养成服从真理、不畏权威的科学精神，以及质疑、批判的习惯。

三、对数学美的欣赏与追求

M. 克莱因在总结数学形成的动力时说，实用的、科学的、美学的和哲学的因素，共同促进了数学的形成，“进行数学创造的最主要的驱策力是对美的追求”。抽象数学思想大师罗素（Bertrand Russell，1872—1970）曾说：“数学，如果正确地看它，则具有至高无上的美——正像雕刻的美，是一种冷而严肃的美，这种美没有绘画或音乐那样华丽的装饰，它可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。”我国著名数学家华罗庚教授说过：“就数学本身而言，是壮丽多彩、千姿百态、引人入胜的……认为数学枯燥乏味的人，只是看到了数学的严谨性，而没有体会出数学的内在美。”

数学的美并不是只有从事数学研究的专家才能品味享受，一些数学概念和原理如对称、透视、比例、黄金分割乃至现代的分形等等，通过在绘画、音乐、建筑中的应用而物化的艺术作品为广大公众喜闻乐见。谁也不能否认，如果没有透视的数学原理，就不可能有文艺复兴时代以来一幅幅传世名画；没有三分律、十

^① 教育部. 义务教育数学课程标准（2011年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012：7.

二平均律等简单的比例规律，也就不可能有古今中外无数美妙动听的音乐作品，更不用说今日计算机创作的大量分形绘画、电子音乐和动漫作品了。这些数学概念与原理，无疑是艺术创作中美的源泉。

数学家们从自己的研究实践中深刻地认识到数学的美以及它的形式。数学的美主要体现在和谐美、简洁美和奇异美等。

1. 和谐美

对称和统一是和谐美的集中体现，很多数学的图形、公式、结构等体现了对称性和统一性。例如，

二项式展开式显示出很强的对称性:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$ 在这个式子中, a 与 b 的位置交换结果是不变的。这个式子的右端的系数 ($n=7$) 还可以排列成下面的对称形式:

					1										
					1		1								
				1		2		1							
			1		3		3		1						
		1		4		6		4		1					
	1		5		10		10		5		1				
		1		6		15		15		6		1			
1			7		21		35		35		21		7		1

这样的例子举不胜举。

统一性在数学中也体现得令人感叹。无论在代数领域内还是在几何领域内，抑或在代数与几何领域之间，都能看到数学对象的统一。例如，19 世纪，著名的德国数学家 F. 克莱因（Christian Felix Klein，1849—1925）在其名为“爱尔朗根纲领”的演讲中，将所有的几何学统一在变换群下，即不同的几何只是对应于不同的变换群而已，却都是在研究不同的变换群下的不变性与不变量。

再如，圆锥曲线可以由平面以不同的方式截圆锥而得，这是圆锥曲线的一种统一表现，而在平面直角坐标系中，圆锥曲线又可以统一表示为：

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

2. 简洁美

简洁是数学美的又一体现。符号是数学得以简洁的重要体现。现在大数会经常出现在我们的日常生活中，百万、千万甚至亿万这样的数，在数学中可以简单



表示。如 2^{2014} 这样的大数，一般语言不易说得清楚，而用 10^{-9} 这样简洁的方式来表示纳米的大小，会让人能对纳米的大小有了估量，否则，怎样去描述这样一个微小的量呢？

还有，我们熟悉的“ x_0 是 $f(x)$ 定义域内的任意一点，称当 x 趋近于 x_0 时， $f(x)$ 以 $f(x_0)$ 为极限，如果满足以下条件：对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$ ，总存在着一个正数 $\delta > 0$ ，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立”，简单的四个句子，描述了怎样的一个复杂的、变化的、细微的过程以及量与量之间的关系！

只要你留意，就会发现数学中的表示、结论等方面体现的简洁性，你会从中感受到美。

3. 奇异美

数学中很多奇异的现象引起人们的兴趣，促使人们探究它、欣赏它，也给人带来了美的享受。

例如，能够刻画很多自然现象的斐波那契数列：1, 2, 3, 5, 8, …，本身就很有趣，而这样一个由自然数构成的数列，它的通项公式却是一个无理表达式：

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

恩格斯曾经说过，数学是研究数量关系和空间形式的科学。数学与人类发展和社会进步息息相关，随着现代信息技术的飞速发展，数学更加广泛应用于社会生产和日常生活的各个方面。数学作为对于客观现象抽象概括而逐渐形成的科学语言与工具，不仅是自然科学和技术科学的基础，而且在人文科学与社会科学中发挥着越来越大的作用。特别是 20 世纪中叶以来，数学与计算机技术地结合在许多方面直接为社会创造价值，推动着社会生产力的发展。^①

重要结论与启示

1. 数学在推动社会发展、促进人类文明进步和提升公民素养等方面发挥着重要作用。
2. 数学是一切高新技术的基础，数学的定量刻画特点在人文社会科学的发展中扮演着越来越重要的角色。
3. 数学是推动人类文明发展的重要动力。
4. 随着时代的发展，数学在社会的各个领域的应用越来越广泛和深入，数学素养是公民一般素养的重要组成部分。

^① 教育部. 义务教育数学课程标准（2011 年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012：1.



学习评价

1. 举出实例说明数学在高新技术中的基础性作用。
2. 举例说明数学在人文社会科学中发挥的作用。
3. 结合历史事实,说明数学在人类文明发展中发挥的作用。
4. 结合自己生活经历,说明数学素养对你生活的积极影响。

参考文献

- [1] M. 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005.
- [2] 严士健. 面向 21 世纪的中国数学教育——数学家谈数学教育[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1994.
- [3] 黄翔. 数学教育的价值[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [4] 柯朗, 罗宾, 斯图尔特. 什么是数学: 对思想和方法的基本研究.[M] 左平, 张饴慈, 译. 上海, 复旦大学出版社, 2005.
- [5] 刘晓玫. 社会发展对数学的需求与数学教育改革[J]. 数学教育学报, 2000. 8: 58-63.

拓展阅读

- [1] M. 克莱因. 古今数学思想[M]. 张理京, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2009.
- [2] 张楚廷. 数学文化[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [3] 黄翔. 数学教育的价值[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [4] 柯朗, 罗宾, 斯图尔特. 什么是数学: 对思想和方法的基本研究[M]. 左平, 张饴慈, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005.