目　录

第一章

函数、极限与连续

典型例题

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\arcsin(x-1)+\ln(\ln x)$；

(2) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\log_a(1-x)}$.

分析　求函数的定义域的关键在于使解析式有意义的自变量的取值范围. 通常考虑以下几点：

(1)分母不能为零；

(2)负数不能开偶次方；

解　(1)因该函数是两个函数的和，故 $|1-x|\leqslant 1,\ln x>0$ 及 $x>0$，即 $0\leqslant x\leqslant 2$，$x>1$ 及 $x>0$，则定义域为 $1<x\leqslant 2$.

(2)注意负数和零无对数时要求 $1-x>0$，分母不能为零时要求 $\log_a(1-x)\neq 0$；因此必须 $\begin{cases}1-x>0,\\ \log_a(1-x)\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1-x>0,\\ (1-x)\neq 1,\end{cases}$ 所以定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

例 2　设 $f(x)=e^x$，$f[\varphi^2(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

解　由已知 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，从而 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

例 3　求下列数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}+1}=\dfrac{1}{5}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\sqrt{n^2+1}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

分析 通过等式变形化简通项,然后按照四则运算法则归结到基本极限来计算;通过不等式变形估计通项,然后按照夹逼准则归结到基本极限来计算.

(3)由于

$$x_n=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\frac{2}{2\times 3}+\frac{2}{3\times 4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{n-1}{n+1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}x_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}$$

$$=1.$$

(4) $\frac{n}{n+\sqrt{n}}<\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)<\frac{n}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1.$

(5)记

$$x_n=n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right),$$

则

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<x_n<\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1,$$

由夹逼准则得.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

(6) 设 $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

所以 $x_n<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=1$

$x_n>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

即 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<x_n<1$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}1=1$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

例 4　(1)求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$;

(2)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$;

分析　(1)当 $x\to0$ 时,函数的分子和分母的极限都是零,分子是无理式,可以将分子有理化,将分子、分母同时乘以 $\sqrt{1-x}+1$,约去无穷小因子 x .

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{1}{(\sqrt{1-x}+1)}\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2)**分析**　分子有理化,将分子、分母同时乘以 $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 5 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$；

解 (1) 当 $x\to 1$ 时，函数的分子和分母的极限都是零，可以将分子、分母分别进行因式分解，便可约去无穷小因子 $x-1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

(2)当 $x\to \pi$ 时，函数的分子和分母的极限都是零，可以将分子、分母分别进行三角恒等变形消去零因子后再进行计算.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}&=\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}\\&=\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}\\&=\frac{1+1}{1+1+1}\\&=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

分析 当 $x\to 1$ 时，两项均无极限，因此不能用求极限的四则运算法则. 此题可经过通分，然后求极限.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\&=1.\end{aligned}$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

分析 可以将 $(\sqrt{x^2+x}-x)$ 有理化.

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to +\infty}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\&=\lim_{x\to +\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}\\&=\arcsin\frac{1}{2}\\&=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 为常数，求 a,b.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}$

当 $x\to\infty$ 时，若 $a\neq 1$，则所给函数趋于无穷大，与条件矛盾，故 $a=1$，

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-(1+b)x-b}{x+1}=-(1+b)=0$，

故 $a=1,b=-1$.

例 9　(1)设 $b=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2-x-3}{x+1}$，其中 a,b 为常数，求 a,b；

(2)设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+x+b}{x^2-1}=3$，试确定 a,b 之值.

(1)**分析**　由已知当 $x\to-1$ 时，函数分子的极限是零，先求出分子的极限为零时 a 的值. 再求此极限得 b 的值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$，且 $b=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2-x-3}{x+1}$ 存在，

所以有 $\lim\limits_{x\to-1}(ax^2-x-3)=a+1-3=0$，得 $a=2$.

$b=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2-x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+1}=-5$

故 $a=2,b=-5$.

(2) 因 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+x+b}{x^2-1}=3$，

故 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\dfrac{x^3+ax^2+x+b}{x^2-1}=\dfrac{a+b+2}{2}=0$，

即 $b=-a-2$，

则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+x+b}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}+a+\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)=\dfrac{3}{2}+a+\dfrac{1}{2}=2+a=3$

所以 $a=1,b=-3$.

例 10　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan(2x)}{\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

分析　利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{-(\pi-x)}=-\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)}=-1$.

(2) $$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(2x)}{\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

$$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}\cdot\frac{\sin(2x)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{-2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\frac{\sin(2x)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times1$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

例 11 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

分析 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$

$$=\mathrm{e}^2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}\right]^{3}=\mathrm{e}^3$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{2x-1}}\right]^{\frac{2x-1}{-x^2}\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{2x-1}}\right]^{-\frac{2x-1}{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{-2}.$$

(4)方法一

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2(x+2)-3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{3}}$$

$$=\mathrm{e}^2.$$

方法二

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}}{\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{4}}$$

$$=\frac{e^{6}}{e^{4}}$$

$$=e^{2}.$$

例 12　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解　(1)当 $x\to 0$ 时，$e^{-2x}-1\sim-2x$，利用等价无穷小代换有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x}=-2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1.$

注意　当 $x\to 0$ 时，$e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\frac{x^{2}}{2}}{\frac{2x^{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}.$

注意　当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^{2}}{2}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{x}{2}$.

例 13　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}$.

注意　利用等价无穷小代换时，只有整个分子(或分母)或其因子才能用等价无穷小代换，加减运算的每一项不能代换，不能将 $\tan x-\sin x$ 用 $x-x(x\to 0)$ 代换.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^{2}x}$.

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^{2}}{2}$，$\sin^{2}x\sim x^{2}$，利用等价无穷小代换有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^{2}}{2}}{x^{2}}=\dfrac{1}{2}$. 从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}=\dfrac{1}{2}$.

例 14　求 $\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{-\sqrt{1-\cos x}}{e^{\sin x}-1}$.

解　由于 $-\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}$，

当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$，$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sqrt{1-\cos x}}{e^{\sin x}-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{x}{2}}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 15 设 $f(x)=\begin{cases}2e^x,x\leqslant 0\\3x+a,x>0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处连续，求 a .

解 在分段点 $x=0$ 处连续，是指 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，于是

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}2e^x=2,f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(3x+a)=a,$$

故 $a=2$.

例 16 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0,\\a, & x=0,\\x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 a,b .

解 由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，根据函数在一点连续的充要条件，应有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.
由于

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\sin x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}+b\right)=b$$

及 $f(0)=a$，则 $a=b=1$.

例 17 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}},x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$ 的连续性.

解 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 是初等函数，所以 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\neq 0$ 时连续.

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，

则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，
所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

例 18 确定 a,b 的值使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b,|x|\leqslant 1\\x^2+2x-2,|x|>1\end{cases}$ 处处连续.

解 由已知 $f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 连续. 因此有
$f(1)=f(1-0)=a+b,f(1+0)=1$,
$f(-1)=f(-1+0)=-a+b,f(-1-0)=-3$,
由 $\begin{cases}a+b=1\\-a+b=-3\end{cases}$ 解得 $a=2,b=-1$,

故当 $a=2,b=-1$ 时 $f(x)$ 连续.

例 19　求 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2-1}{|x|\cdot(x^2-4)}$ 的间断点,并确定其类型.

解　$x=0,x=2,x=-2$ 是 $f(x)$ 的间断点,

在 $x=0$ 处,$f(+0)=\dfrac{0-2}{0-4}=\dfrac{1}{2}$,$f(-0)=\dfrac{(0-2)}{-(0-4)}=-\dfrac{1}{2}$,

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点;

在 $x=2$ 处,$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4}$,

故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的可去间断点;

在 $x=-2$ 处,$\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-1}{(x+2)}=\infty$;

故 $x=-2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

例 20　求 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

分析　在前面我们介绍了利用重要极限求值,学习了函数的连续性后,也可用如下方法求值:

$\lim(1+f(x))^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln(1+f(x))}=\mathrm{e}^{\lim g(x)f(x)}$,

其中在同一极限过程中 $\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$.

解法一

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{6x}{x}}=\mathrm{e}^6.$$

解法二

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^6=\mathrm{e}^6.$$

解法三

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^6.$$

例 21　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)<0,f(1)>1$,证明在开区间 $(0,1)$ 内至少有一点ξ,使 $f(\xi)=\xi$.

证明　设 $g(x)=f(x)-x$,则 $g(0)=f(0)-0<0$, $g(1)=f(1)-1>0$. 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,所以 $g(x)=f(x)-x$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,从而存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

例 22　设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续,且 $f(0)=f(2a)$,证明:在 $[0,a]$ 上至少有一点 ξ ,使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证明　设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$,由于 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续,则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,且 $F(0)=f(0)-f(a)$, $F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$,

若 $f(0)-f(a)=0$, 则取 $\xi=0$ 或 $\xi=a$ 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$,

若 $f(0)-f(a)\neq0$, 则

$F(0)\cdot F(a)=[f(0)-f(a)][f(a)-f(0)]=-[f(0)-f(a)]^2<0$,

由零点定理知在 $(0,a)$ 内至少有一点 ξ ,使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+a)$,

综上所述,在 $[0,a]$ 上至少有一点 ξ ,使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

应用实例

例 1 当推出一种新的电子游戏程序时，在短期内销售量会迅速增加，然后开始下降，其函数关系为 $s(t)=\dfrac{1000t}{2t^2+50}$（$t$ 为月份）. 若要对该产品的长期销售作出预测，试建立相应的表达式.

解 该产品的长期销售量应为时间 $t\to+\infty$时的销售量，即求极限

$$\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1000t}{2t^2+50}$$

分子、分母同除以 t^2，得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1000t}{2t^2+50}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{1000}{t}}{2+\dfrac{50}{t^2}}=\frac{\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1000}{t}}{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(2+\dfrac{50}{t^2}\right)}=\frac{0}{2+0}=0.$$

即当 $t\to+\infty$时，产品的销售量的极限为 0. 这就是说，人们购买游戏会越来越少，从而转向购买新的游戏. 进而说明商家要不断开发新的游戏程序，来增加自身在商场中的竞争力.

例 2 在交流电路中，电容的容抗 X_C 和电感的感抗 X_L 分别为：

$$X_C=\frac{1}{2\pi fC},\ X_L=2\pi fL$$

其中常量 C，L 分别代表电容值和电感值，$f>0$ 是交流电的频率. 试计算 $\lim\limits_{f\to0}X_C$，$\lim\limits_{f\to0}X_L$，$\lim\limits_{f\to+\infty}X_C$，$\lim\limits_{f\to+\infty}X_L$.

解 由极限的计算可知：

$$\lim_{f\to0}X_C=\lim_{f\to0}\frac{1}{2\pi fC}=+\infty,\ \lim_{f\to+\infty}X_C=\lim_{f\to+\infty}\frac{1}{2\pi fC}=0,$$

其物理意义说明电容原件有“阻低频、通高频”的作用；

$$\lim_{f\to0}X_L=\lim_{f\to0}2\pi fL=0,\ \lim_{f\to+\infty}X_L=\lim_{f\to+\infty}2\pi fL=+\infty,$$

其物理意义说明电容原件有“阻高频、通低频”的作用.

基础题

一、填空题

1. 函数 $f(x)=2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$________.
2. 已知 $f(x)$ 的定义域为[0，1]，则 $f(\ln x)$ 的定义域是________.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}=$______________.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}=$________.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+1}{(x-1)(2x+1)^2}=$________.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}=$________.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)}{3x}=$________.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=$________.

9. $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\dfrac{\sin\pi x}{x}\right)=$________.

10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}=$________.

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+4}-2}=$________.

12. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x+1}=$________.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x}=$________.

14. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=e^2$,则 $k=$________.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant0,\\ a+x, x>0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续,则 $a=$________.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan kx}{x}, x<0,\\ x+2, x\geqslant0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $k=$________.

17. 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ x-1, & 1\leqslant x<2\\ 3-x, & x\geqslant2\end{cases}$ 的不连续点为 $x=$________.

18. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{kx}, x>2\\ x^2+1, x\leqslant2\end{cases}$,若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,则 $k=$________.

19. 设 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 有有限极限值 L,则 $a=$________, $L=$________.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=$________.

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x-\sin2x}{x^3}=$________.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{ax}=e^2$,则 $a=$________.

23. $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$________.

24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\ln(1+x)}=$________.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{4}{x}=$________.

26. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}=$________.

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=$________.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=$________.

30. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos^2 x$ 与 $a\sin^2\dfrac{x}{2}$ 为等价无穷小，则 $a=$________.

31. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}+1}=$________.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}=$________.

33. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(1-kx)^{\frac{1}{x}}=e^2$，则 $k=$________.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}=$________.

35. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ 3x+2, & x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 点连续，则 $a=$________.

36. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}=$________.

37. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|(x^2+3x+2)}{(x^2-1)\sin x}$ 的无穷间断点是________.

38. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=$________.

39. 当 $x\to+0$ 时，无穷小 $\alpha=\ln(1+Ax)$ 与无穷小 $\beta=\sin 3x$ 等价，则常数 $A=$________.

40. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-a}{x^2-1}=2$，则 $a=$________.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}=$________.

42. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则 $a=$________，$b=$________.

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^2\sin\dfrac{1}{x}}=$________.

44. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=$________.

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}=$________.

46. 当 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+a}{x^3-1}$ 存在时，$a=$________.

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}=$________.

二、选择题

1. 极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ 等于(　　).

A. 0　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^2 mx}{2x^2}$ 等于(　　).

A. 0　　B. $\dfrac{m}{2}$　　C. $\dfrac{m^2}{2}$　　D. ∞

3. 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但非等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

4. 当 $x\to0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但非等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

5. 当 $x\to0^+$ 时，下列函数中的无穷小是(　　).

A. $x\sin\dfrac{1}{x}$　　B. $e^{\frac{1}{x}}$　　C. $\ln x$　　D. $\dfrac{1}{x}\sin x$

6. 下列结果不成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\tan x)}{x}=1$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^{-2}　　B. ∞　　C. 0　　D. $\dfrac{1}{2}$

8. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x\geqslant1\\ \cos\pi x, & x<1\end{cases}$ 在 R 上连续，则 a 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -2

9. 当 $x\to0$ 时，$y=\ln(1+x)$ 与下列哪个函数不是等价无穷小的(　　).

A. $y=x$　　B. $y=\sin x$　　C. $y=1-\cos x$　　D. $y=e^x-1$

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x<1\\ x+1, x\geqslant1\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 当 $x\to1$ 时的结果是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. 不存在

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a, & x=2, \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}, & x\neq 2 \end{cases}$ 在点 $x=2$ 处连续，则 a 等于（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

12. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{3}, & x\neq 0 \\ a\ , & x=0 \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续函数，则 $a=$（　）.

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 3

13. 点 $x=1$ 是函数 $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ 1, & x=1 \\ 3-x, & x>1 \end{cases}$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 第一类非可去间断点

C. 可去间断点　　D. 第二类间断点

14. 方程 $x^4-x-1=0$ 至少有一根的区间是（　　）.

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　C. $(2,3)$　　D. $(1,2)$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为（　　）.

A. 1　　B. ∞　　C. 不存在　　D. 0

16. 当 $x\to 0$ 时，下列与 x 同阶（不等价）的无穷小量是（　　）.

A. $\sin x-x$　　B. $\ln(1-x)$　　C. $x^2\sin x$　　D. e^x-1

17. 使函数 $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+1}}{x^3-1}$ 为无穷小量的 x 的变化趋势是（　　）

A. $x\to 0$　　B. $x\to 1$　　C. $x\to -1$　　D. $x\to +\infty$

18. 当 $n\to\infty$ 时，与 $\sin^2\dfrac{1}{n}$ 等价的无穷小是（　　）

A. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　B. $\dfrac{1}{n}$　　C. $\dfrac{2}{n}$　　D. $\dfrac{1}{n^2}$

19. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan kx}{x}, x>0 \\ x+3, x\leqslant 0 \end{cases}$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，则 k 的值为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

20. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, x>0 \\ \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x<0 \end{cases}$，则（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

C. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 不存在　　D. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 存在

21. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-2, x>0 \\ 1, x=0 \\ x-\cos x, x<0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 不存在

22. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+6}{1-x}=5$，则 a 的值为(　　).

A. 7　　B. -7　　C. 2　　D. -2

23. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+c}{x-1}=-1$，则 c 的值为(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

24. 设 $f(x)=\dfrac{4x^2+3}{x-1}+ax+b$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则 a,b 的值，用数组 (a,b) 可表示为(　　).

A. $(4,-4)$　　B. $(-4,4)$　　C. $(4,4)$　　D. $(-4,-4)$

25. 下列极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$

26. 下列等式成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}=e^2$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=e^2$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+2}=e^2$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}=e^2$

27. 当 $x\to 0$ 时，与 x 为等价无穷小量的是(　　).

A. $\sin 2x$　　B. $\ln(1-x)$

C. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$　　D. $x(x+\sin x)$

28. 已知 $\lim\limits_{x\to\gamma}[f(x)+g(x)]$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to\gamma}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\gamma}g(x)$(　　).

A. 均存在　　B. 均不存在

C. 至少有一个存在　　D. 都存在或都不存在

29. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则(　　).

A. $a=b=1$　　B. $a=b=-1$

C. $a=-1$，$b=1$　　D. $a=1$，$b=-1$

30. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{\sin x}{x}}=$(　　).

A. 1　　B. e^2　　C. e　　D. 2

31. $x=0$ 是 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的(　　)间断点.

A. 可去　　B. 跳跃　　C. 无穷　　D. 振荡

32. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}, x>0\\ k\mathrm{e}^{x-1}, x\leqslant 0\end{cases}$，在 $x=0$ 点连续，则 $k=$（　　）.

A. $2\mathrm{e}$　　B. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$　　C. $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　D. $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

33. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 可去间断点

34. 若 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-a}{x(x-1)}$，$x=0$ 为无穷间断点，$x=1$ 为可去间断点，则 $a=$（　　）.

A. 1　　B. 0　　C. e　　D. e^{-1}

35. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(1-x)}{(x-1)^2(x+2)}=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. 0　　D. $\dfrac{2}{3}$

36. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中是无穷小量的是（　　）.

A. $\sin(x+1)$　　B. $1-\cos x$

C. $\tan\dfrac{1}{x+1}$　　D. $\mathrm{e}^{\sin x}$

37. 已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x}+ax\right)=0$，则常数 a 等于（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

38. 下列各式正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{x}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

39. 当 $x\to 0$ 时，下列函数哪一个是其它三个的高阶无穷小（　　）.

A. x^2　　B. $1-\cos x$

C. $x-\tan x$　　D. $\ln(1+x^2)$

40. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos x-1}$ 等于（　　）.

A. ∞　　B. 2　　C. 0　　D. -2

41. 设函数 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-x}\right)^n$，则 $f(x)=$（　　）.

A. e^{x-1}　　B. e^{x+2}　　C. e^{x+1}　　D. e^{-x}

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为（　　）.

A. 1　　B. ∞　　C. 不存在　　D. 0

43. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x^2},\ x\neq 0\\ a,\ x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$(　　).

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

44. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}},x\neq 1\\ 0,\ x=1\end{cases}$，则点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 连续点　　B. 跳跃间断点　　C. 可去间断点　　D. 第二类间断点

45. 设 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 无穷间断点

46. $\lim\limits_{x\to\pi}(1-\cos x)^{2\sec x}=$(　　).

A. e^{-2}　　B. e^2　　C. 4　　D. $\dfrac{1}{4}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}=$(　　).

A. e^3　　B. 8　　C. 1　　D. ∞

三、计算题

1. (1)已知 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$，求 $f(x),f(x+1),f(2^x-1)$ 的定义域；

(2)设 $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$ 求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域.

2. (1)设 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$ 的表达式；

(2)设 $f(x)=1+\ln x,\varphi(x)=\sqrt{x}+1$，求 $f[\varphi(x)]$.

3. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$.

4. 求下函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin x)}{1-\cos x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1)]$.

5.求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{x+1}\right)^{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^{2}}-1}{\sin2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\tan x}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^{2}-1}$； (6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$； (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

6.确定下列问题的参数值

(1)试确定常数 a 与 b，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{2}-x+1}-ax-b)=0$；

(2)试确定常数 a 使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+2, & x<1,\\ \sin\dfrac{\pi}{2}x, & x\geqslant1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续；

(3)设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+a\cos x-2}{\ln(1+x)}=b$ 为常数，求常数 a 与 b.

7.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos bx}{x^{2}}, & x\neq0\\ 2b-\dfrac{3}{2}, & x=0\end{cases}$，确定 b 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

8.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x^{2}+\sqrt{1+x^{2}})}{ax^{2}}, & x\neq0\\ a+\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$，确定 a 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

9. 设 $f(x)=\dfrac{(x-b)(\sqrt{1+3x}-b)}{x(x-1)}$，确定 b 值使 $f(x)$ 有无穷间断点 $x=0$，有可去间断点 $x=1$.

10. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-a^{2}x^{2}}}{1-\cos x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ $(a\neq0)$ 确定 a 值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

11.指出 $f(x)=\dfrac{x^{2}-x}{|x-1|\sin x}$ 的间断点，并判定其类型.

12.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{4}+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\neq1, x\neq-2\\ 2 & x=1\end{cases}$，在 $x=1$ 处连续，确定 a,b 的值.

13.设 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x-1}, & x\neq1\\ 0, & x=1\end{cases}$，判定 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x, & |x|>1\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 的连续性.

16. 证明方程 $x\cdot 2^x=1$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

17. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n+n}\right)$.

18. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

19. 设 $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限值.

20. 已知 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限值.

21. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x}{x+\sin x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+3x}{3x-2}\right)^x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(1+x\sin x)^x-1]}{x^3}$.

22. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin x^2}$.

23. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x}, & x>0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 的连续性，如果是间断点，判别其类型.

24. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x\sin x, & x>0\end{cases}$ 的连续性.

25. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ 的连续区间，间断点，并指出间断点的类型.

26. (1)设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，确定 $f(x)$ 的定义域及值域；

(2)设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x}+\ln(x^2-x)$，求 $f(x)$ 的定义域.

27. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{n}$.

28. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{\ln(1+2x)}$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^{2}-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2x^{2}-1}}$；

(8) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

29. 确定下列问题的参数值.

(1)设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^{2}+bx-1}{1+x}=2$,求常数 a 与 b；

(2)设 $f(x)=\begin{cases}e^{x}, x\leqslant0\\ x+b, x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续,求 b 的值.

30. 设 $x_{1}=1, x_{n+1}=\sqrt{2x_{n}+3}\,(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}$.

31. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{x\cos x}}{x\cdot\ln(1+x^{2})}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{\sin x}-1)^{4}\cdot\sqrt{1+x^{2}}}{(1-\cos x)\ln(1+x^{2})}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^{2}}-1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^{2}}}{1-\cos x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{3}{x-1}}$；

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^{2}}}{\sqrt{1+x}-1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^{2}}-\cos x}{\ln(1+x^{2})}$.

32. 求常数 a,b，使函数 $f(x)=\begin{cases}1+x^{2}, & x<0\\ ax+b, & 0\leqslant x\leqslant1\\ x^{3}-2, & x>1\end{cases}$ 为连续函数.

33. 证明方程 $x=e^{x-3}+1$ 在开区间 $(0,2)$ 内至少有一个根.

34. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, x<0\\ ax+b, 0\leqslant x\leqslant1\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, x>1\end{cases}$，在所定义的区间上连续,求 a,b.

提高题

一、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\geqslant 0 \\ (a+b)x^2+x, & x<0 \end{cases}$ $(a+b)\neq 0$，$f(x)$ 处处连续的充要条件是$b=$________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{\cos n}{n}+\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n\right)=$________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=$________.

5. 若 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=$________.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

7. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

8. 设 $f(x)=\dfrac{\csc x-\cot x}{x}$ $(x\neq 0)$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(0)=$________.

9. 设 $f(x)=x\cot 2x(x\neq 0)$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续，则 $f(0)=$________.

10. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则 $k=$________.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

二、选择题

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，则当 n 充分大时，下列正确的有(　　).

A. $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　B. $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$

C. $a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　D. $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

2. 当 $x\to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 的高阶无穷小，则下列式子中错误的是(　　).

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　B. $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　D. $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

3. 设 $f(x)=2^x-1$，则当 $x\to 0$ 时，(　　).

A. $f(x)$ 是 x 的等价无穷小　　B. $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小

C. $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小　　D. $f(x)$ 是比 x 高阶无穷小

4. 当α与β均不为 0 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}=$(　　).

A. $\alpha-\beta$　　B. $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}$

C. 1　　D. ∞

5. 下列各式中的极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x}{3x^2-1}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$

6. 下列四个极限之中，有三个极限值完全相同，试选出与众不同的极限值的代号(　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$　　B. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$　　D. $\lim\limits_{x+\infty}\dfrac{\sin[\ln(1+x)-\ln x]}{\ln(1+x)-\ln x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$，则 a 的值为(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 若 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=-\dfrac{1}{16}$，则 $f(x)=$(　　).

A. $x+1$　　B. $x+5$　　C. $\sqrt{x+13}$　　D. $\sqrt{x+6}$

9. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x^2},\ x\neq 0\\ a,\ x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$(　　).

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　).

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

三、计算题

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{n-1}{n}a\right)\right]$.

2. 求下函数的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)(a>0)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^5-(1+4x)^3}{x}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}$.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}(|a|<1,|b<1)|$ ；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}\,(a>0,b>0)$ ；

(3)求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x+c^x)^{\frac{1}{x}}(0<a<b<c)$ ；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(\cos x)^{\sin x}-1]}{x^3}$.

6. 证明 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$ 的间断点,并判别其类型.

7. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,如果有间断点,判别其类型.

8. 求常数 a ,使得函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1},x<1,\\ e^{2ax}-e^{ax}+1,x\geqslant 1\end{cases}$$

在点 $x=1$ 连续.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}$.

10. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(x+\cos x^2)\ln(1+x)}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x},x\neq 1\\ a,x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续,求 a .

12. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=4$, 试确定 a,b 的值.

13. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$ ；　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+x^2)}{x}$.

14. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\tan x}-\sqrt{4+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$ ；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}-\cos x}$.

15.设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(a+b\sin x)}{\sin^2 x}$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 a,b 的值.

16.设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 连续函数，求 a,b 的值.

17.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<b$，证明：对任意两个正数 ω_1,ω_2，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\omega_1 f(x_1)+\omega_2 f(x_2)=(\omega_1+\omega_2)f(\xi)$.

18.设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n n=1,2,\cdots$

(1)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；　　（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

19.设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点.

20.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

参考答案

基础题

一、填空题

1. $1+\log_2 x$	2. $[1,e]$	3. $\dfrac{3}{2}$	4. x	5. $\dfrac{1}{4}$
6. e^3	7. $-\dfrac{2}{3}$	8. 0	9. -1	10. $\dfrac{1}{16}$
11. 2	12. e^6	13. e	14. 1	15. 1
16. 2	17. 1	18. $\dfrac{1}{2}\ln 5$	19. 4，10	20. 1
21. 1	22. 2.	23. e^2	24. $\dfrac{1}{4}$	25. $\dfrac{12}{5}$
26. e^6	27. $\dfrac{4}{3}$	28. $e^{\frac{1}{2}}$	29. 2	30. 4
31. $e^{-\frac{1}{2}}$	32. $\dfrac{1}{4}$	33. -2	34. $\dfrac{1}{2}$	35. 2
36. $\dfrac{6}{5}$	37. $x=1$，$k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$			38. $\dfrac{1}{4}$
39. 3	40. 3	41. 2	42. 1，-1	43. 3
44. $\dfrac{2}{3}$	45. e^{-2}	46. -1	47. e^{1+x}	

二、选择题

1. C	2. A	3. A	4. B	5. A
6. A	7. A	8. D	9. C	10. D
11. B	12. C	13. C	14. D	15. D
16. C	17. B	18. C	19. D	20. C
21. B	22. A	23. B	24. C	25. D
26. C	27. B	28. C	29. D	30. D
31. A	32. B	33. B	34. D	35. C
36. A	37. B	38. A	39. C	40. C
41. D	42. C	43. C	44. D	45. C
46. D	47. B			

三、计算题

1.(1) $f(x)$ 的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 1$；$f(x+1)$ 的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 0$；$f(2^x-1)$ 的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 1$.

(2) $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$.

2.(1) $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$;(2) $f[\varphi(x)]=1+\ln[\varphi(x)]=1+\ln(\sqrt{x}+1)$.

3.(1) $\frac{1}{2}$　　(2) 1　　(3) 2　　(4) $\frac{\pi^2}{2}$

4.(1) 0　　(2) $\frac{4}{3}$　　(3) $-\frac{1}{4}$　　(4) 0

(5) $\frac{1}{2}$　　(6) 2　　(7) 2

5.(1) e　　(2) $\frac{1}{4}$　　(3) e　　(4) 1　　(5) $\frac{1}{2}$

(6)
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x\tan x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{x\sin x}{x\tan x}+\frac{1-\cos x}{x\tan x}\right)\\&=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\\&=\frac{3}{4};\end{aligned}$$

(7) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{(-2x)\cdot(-\frac{3}{2})}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}=e^3;$$

(8) $e^{-\frac{3}{2}}$.

6.(1) $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$；(2) $a=-1$；(3) $a=2, b=1$.

7. $2b-\dfrac{3}{2}=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos bx}{x^2}=\dfrac{b^2}{2}$

令 $2b-\dfrac{3}{2}=\dfrac{b^2}{2}$，即 $b^2-4b+3=0$，解 $b=1$ 或 $b=3$ 为所求.

8. $a+\dfrac{1}{2}=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})}{ax^2},$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sqrt{1+x^2}-1}{ax^2}$$

$$=\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2a}$$

令 $a+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2a}$，即 $2a^2+a-3=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-\dfrac{3}{2}$ 为所求.

9.因 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，故

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-b)(\sqrt{1+3x}-b)}{x}=(1-b)(2-b)=0$，

得 $b=1$ 或 $b=2$，

当 $b=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)(\sqrt{1+3x}-1)}{x(x-1)}=\dfrac{3}{2}$，

这与 $x=0$ 为无穷间断点矛盾，故 $b\neq 1$，

当 $b=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(\sqrt{1+3x}-2)}{x(x-1)}=\infty$，故 $b=2$ 为所求.

10. $a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-a^2x^2}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}a^2x^2}{\frac{1}{2}x^2}=a^2$

即得 $a=a^2$，因 $a\neq 0$，故 $a=1$.

11. $x=0, x=1, x=\pm\pi, \pm 2\pi, \cdots, \pm n\pi, \cdots$ 都是 $f(x)$ 的间断点，

在 $x=n\pi(n\neq 0, n\in z)$，$\sin n\pi=0$，$\lim\limits_{x\to n\pi}f(x)=\infty$

故 $x=\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)}{|x-1|\sin x}=-1$，$f(0)$ 无意义，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点. 在 $x=1$ 处，$f(1-0)=\dfrac{-1}{\sin 1}$，$f(1+0)=\dfrac{1}{\sin 1}$，$f(1-0)\neq f(1+0)$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

12. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)} & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，故有 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

$0=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+ax+b}{x+2}=\dfrac{1}{3}(a+b+1)$，得 $a=-1-b$，

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x-bx+b}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x^2+x+1)-b}{x+2}=\dfrac{3-b}{3}=2$，

所以 $b=-3$

从而 $a=2$，即当 $a=2,b=-3$ 时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

13. $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=\pi$，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=0$

$f(0)=0\neq f(1-0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

14. $f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，$f(+0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}=-1$，

$f(0)=1$，故由 $f(0)\neq f(+0)$ 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

15. $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 上都连续.

$f(-1-0)=-1$，$f(-1+0)=(-1)^2=1$，$f(-1-0)\neq f(-1+0)$，

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不连续.

$f(1-0)=1^2=1$，$f(1)=1^2=1$，$f(1+0)=1$，

所以 $f(1-0)=f(0)=f(1+0)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

16. 略.

17. $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n+n}\right)<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n+1)}{n^2+n+n}=\dfrac{1}{2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$

所以由夹挤定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

18. 证明：$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$，

由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

19. 证明　由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\dfrac{1}{x_n}}=1$，可知 $\{x_n\}$ 有下界，由

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)-x_n=\dfrac{1-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$，

于是数列 $\{x_n\}$ 单调递减,因此数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$,于是由

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$ 因此 $a=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$,

因 $x_n\geqslant 1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geqslant 1$,于是有 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

20. 用数学归纳法证明 $x_n<x_{n+1}$,$1\leqslant x_n<2(n=1,2,\cdots)$,由单调有界原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

21. (1) $-\dfrac{1}{2}$; (2) 1;(3) $-\dfrac{1}{6}$; (4) $e^{\frac{7}{3}}$;

(5) $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2x}}\\&=\lim_{x\to0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}\\&=e;\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{[(1+x\sin x)^x-1]}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln(1+x\sin x)}-1}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{x^2}\\&=1.\end{aligned}$$

22. $\dfrac{1}{2}$.

23. 提示:由于 $f(0^-)=1$,$f(0^+)=1$, $f(0^-)=f(0^+)=1\neq 0=f(0)$,

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 是不连续的,$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点,是可去间断点.

24. 当 $x<0$ 时,$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 当为连续函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x\sin x$ 为连续函数,

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\sin x=0$,

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

25. 因为 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$,所以 $x=0$,$x=-1$ 为间断点,

又因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$,所以 $x=-1$ 为无穷间断点;$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$,所以 $x=0$ 为可去间断点.

故 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-1)$,$(-1,0)(0,+\infty)$.

26. (1)当 $x\neq 1$ 时,函数有定义.定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,

又由 $y=\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{2}{1-x}-1$,即 $(y+1)(1-x)=2$,$y\neq-1$,

值域 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(2)定义域为 $[-\sqrt{2},0)\cup(1,\sqrt{2}]$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n}{\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n}=\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}=e$.

28.（1）e^2；　（2）$\dfrac{1}{4}$；　（3）$\dfrac{3}{2}$；　（4）∞；

（5）$4\sqrt{2}$；　（6）1.　（7）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　（8）$-\dfrac{2}{\pi}$.

29.（1）$a=0,b=2$;（2）$b=1$.

30. **解**　$x_1=1,x_2=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}>1=x_1$ 设 $x_n>x_{n-1}$ 成立，则有

$x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}>\sqrt{2x_{n-1}+3}=x_n$，故 $\{x_n\}$ 单调增，

又因 $x_1=1<3$，设 $x_n<3$，则 $x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}<\sqrt{2\times3+3}=3$，

因此数列有上界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\ (A\geqslant\sqrt{3})$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2x_n+3}$，

所以 $A=\sqrt{2A+3}$，$A^2-2A-3=0$，正根 $A=3$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

31.（1）$e^x-e^{x\cos x}=e^{x\cos x}\cdot[e^{x(1-\cos x)}-1]$

当 $x\to0$，$e^x-e^{x\cos x}\sim e^{x\cos x}\cdot x(1-\cos x)$，$\ln(1+x^2)\sim x^2$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{x\cos x}\cdot\dfrac{x(1-\cos x)}{x\cdot x^2}=\dfrac{1}{2}$.

（2）
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=e.\end{aligned}$$

（3）当 $x\to0$ 时

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}=2$.

（4）原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

（5）
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}&=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-1}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{2x^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

(6)原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\sqrt{1+\cos x^2}}\cdot\frac{|\sin x^2|}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 1=\sqrt{2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{3}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{3}{x-1}}=e^3$.

(8)原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-1}\right)$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x^2}+1}=1-0=1.$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

32. $a=-2,b=1$.

33. 略.

34. $a=\pi$, $b=-\frac{\pi}{2}$.

提高题

一、填空题

1. 0
2. $\frac{1}{2}$
3. $1+e^2$
4. $\frac{1}{2}$
5. 1
6. $a=1$
7. -1
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{1}{2}$
10. -2
11. $-\frac{1}{2}$
12. $\frac{3}{2}$

二、选择题

1. A
2. D
3. B
4. A
5. C
6. A
7. A
8. C
9. A

三、计算题

1. $x+\frac{a}{2}$.

2. (1) $\ln a$ ；　(2) $\frac{2}{\pi}$ ；　(3) -2.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)-(\sin x+1)}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$=\dfrac{1}{4}$；

4.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-b}{1-a}\dfrac{1-a^n}{1-b^n}=\dfrac{1-b}{1-a}$.

(2)令 $c=\max\{a,b\}$，则有 $c\leqslant\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqslant c\sqrt[n]{2}$，由于

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，由夹挤定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=c=\max\{a,b\}$.

(3) $3\leqslant(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$，　而　$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，

则　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

5.(1) c；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(\cos x)^{\sin x}-1]}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x\ln\cos x}-1}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ln\cos x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

$=-\dfrac{1}{2}$.

6.由于函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处无定义，因此 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.因为

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{-\frac{2}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1}=-1$，

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

7.提示：$f(x)=\begin{cases}x,|x|<1,\\0,|x|=1,\\-x,|x|>1,\end{cases}$　$x=-1$ 和 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

8.提示：　由 $f(1^-)=3=e^{2a}-e^a+1=f(1^+)=f(1)$，

得 $e^a=-1$ 舍去，$e^a=2$，从而得 $a=\ln 2$.

9. e.

10.(1) 2；　　(2) $\dfrac{1}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\{[\cos(x-1)-1]+1\}}{1-\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{[\cos(x-1)-1]}{\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4}(1-x)^2}$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}(x-1)^2}{\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4}(1-x)^2}$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}$$

所以 $a=-\frac{4}{\pi^2}$.

12. 由 $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3})=0$,知 $\lim\limits_{x\to 1}[(a+b)x+b]=a+2b=0$

得 $a=-2b$,

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{-b(x-1)}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-b(x-1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{2(x-1)}$$

$$=-2b=4$$

因此 $b=-2,a=4$.

13. **解** (1) 令 $x-\mathrm{e}=t$,则 $x=\mathrm{e}+t$,

$$\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+\mathrm{e})-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln \mathrm{e}\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\mathrm{e}}}{t}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

注意 当 $t\to 0$ 时, $\ln\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)\sim\frac{t}{\mathrm{e}}$.

(2)注意 当 $x\to 0$ 时

$\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+x^2)=\ln(1+\mathrm{e}^{\sin x}+x^2-1)\sim \mathrm{e}^{\sin x}+x^2-1$; $\mathrm{e}^{\sin x}-1\sim\sin x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}+x^2-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\right)=1.$$

14. **解**　(1)**分析**　分子有理化，然后用等价无穷小代换.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+\tan x}-\sqrt{4+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)(\sqrt{4+\tan x}+\sqrt{4+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^{\sin x}}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{e^{\tan x-\sin x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+\tan x}+\sqrt{4+\sin x}}$$

$$=1\times1\times\frac{1}{2+2}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

(2)**分析**　分子有理化，然后用等价无穷小代换.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{e^{x^2}-1+1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

15. **解法一**

若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，

从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\cdot\sin^2x=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-a-b\sin x)=0$，

故 $a=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-b\sin x)=1$，

再由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\cdot\sin x=0$，得 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-1}{\sin x}-b\right)=0$，

即 $b=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}+1}=\dfrac{1}{2}$，

故当 $a=1,b=\dfrac{1}{2}$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

解法二

若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，

而 $\lim\limits_{x\to0}\sin^2x=0$，所以必须 $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(a+b\sin x))=0$

求得 $a=1$，此时

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(1+b\sin x)}{\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-2b)+(1-b^2)\sin x}{\sin x[\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}+(1+b\sin x)]}$$

仅当 $1-2b=0$，即 $b=\dfrac{1}{2}$ 时，上面极限存在，

综上所述 $a=1,b=\dfrac{1}{2}$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

16. **解** 由已知 $\begin{cases} f(x)=ax^2+bx, |x|<1 \\ f(x)=\dfrac{1}{x}, |x|>1 \\ f(1)=\dfrac{1}{2}(1+a+b), x=1 \end{cases}$

当 $x=-1$ 时，$f(-1)=\dfrac{1}{2}(-1+a-b)$，

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，有 $a+b=1=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$，即 $a+b=1$，

由 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，有 $a-b=-1=\dfrac{1}{2}(-1+a-b)$，

即 $a-b=-1$，

联立 $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases}$，解得 $a=0,b=1$.

17. **证明** 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$. 所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上有最大值 M 和最小值 m，从而

$m\leqslant f(x_1)\leqslant M, m\leqslant f(x_2)\leqslant M.$

又由于 ω_1,ω_2 都为正常数，所以

$\omega_1 m\leqslant\omega_1 f(x_1)\leqslant\omega_1 M, \omega_2 m\leqslant\omega_2 f(x_2)\leqslant\omega_2 M.$

两式相加，得

$m(\omega_1+\omega_2)\leqslant\omega_1 f(x_1)+\omega_2 f(x_2)\leqslant(\omega_1+\omega_2)M.$

即

$$m\leqslant\frac{\omega_1 f(x_1)+\omega_2 f(x_2)}{\omega_1+\omega_2}\leqslant M.$$

故由连续函数介值定理知，至少存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使

$$\frac{\omega_1 f(x_1)+\omega_2 f(x_2)}{\omega_1+\omega_2}=f(\xi),$$

即

$\omega_1 f(x_1)+\omega_2 f(x_2)=(\omega_1+\omega_2)f(\xi).$

18. (1)证 由于当 $0<x<\pi$ 时，$0<\sin x<x$，所以当 $0<x_n<\pi$ 时，

$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$，已知 $0<x_1<\pi$，故由数学归纳法知对一切 $n=1,2,\cdots$，有

$0<x_{n+1}=\sin x_n<\pi$，即 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n>0$.

由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 a，则 $a\geqslant0$. 令 $n\to\infty$，将 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限，得 $a=\sin a$，$a=0$ 是它的一个解.

另一方面，若 $a>0$，必有 $a>\sin a$，所以由 $a=\sin a$ 只能得到唯一解 $a=0$，即有

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

（2）解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，又由(1)知当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 0$，故考虑极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$$

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}\\&=-\frac{1}{6}\text{ 所以 }\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\&=e^{-\frac{1}{6}},\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

19.解 由于 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ 1+x, & |x|<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x=-1\end{cases}$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

20.证 由题设知 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，所以 $f(0)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 与极限的保号性可知，存在 $a\in(0,1)$，使得 $\dfrac{f(a)}{a}<0$，即 $f(a)<0$．方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.