目　录

第一章
函数及其应用

函数是微积分学的主要研究对象，本章将在中学数学知识的基础上，进一步介绍函数概念及其性质、初等函数以及函数的应用．

第一节　函数概念及其性质

一、集合

集合所涉及的内容很多，在这里只讲述它的基本特点，为函数概念的描述奠定基础．

1. 集合

一般地，某些具有共同特点的对象放在一起就成为一个**集合**，简称**集**．一般用大写的拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 表示．集合中的对象叫做**元素**．一般用小写的拉丁字母 $a,b,c\cdots$ 表示．

常用的集合表示方法有两种：列举法和描述法．

列举法就是把集合中的元素一一列举出来的方法．

例如方程 $x^2-1=0$ 的所有解组成的集合，可以表示为 $\{1,-1\}$；又如，所有大于 0 小于 10 的奇数组成的集合，可以表示为 $\{1,3,5,7,9\}$.

一般地，含有有限个元素的集合叫做**有限集**．

描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法．

例如 $x-3>2$ 的解集，可以表示为 $\{x|x-3>2\}$，或者 $\{x|x>5\}$.

一般地，含有无限个元素的集合叫做**无限集**．

方程 $x^2+1=0$ 的所有解组成的集合，可以表示为 $\{x|x^2+1=0\}$，这个集合是没有任何元素的．一般地，不含有任何元素的集合叫做**空集**，记作 Φ.

2. 区间

设 a,b 是两个实数，且满足 $a<b$，我们规定：

(1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做**闭区间**，表示为 $[a,b]$；

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做**开区间**，表示为 (a,b)；

(3)满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做**半开半闭区间**，分别表示为 $[a,b)$，$(a,b]$.

3. 邻域

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$．设 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\},$$

点 a 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径．

如图 1-1 所示，a 的 δ 邻域也可以记作 $\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$．如果 a 的 δ 邻域中不包含点 a，即数集 $\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$，则称这个数集为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

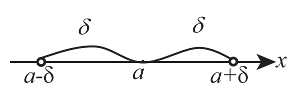


图 1-1

二、函数

设 A,B 是非空数集，如果按照某个对应法则 f，使对于集合 A 中的任意数 x，在集合 B 中都有唯一确定的值 y 与之对应，称 $f:A\rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**，记作

$$y=f(x),x\in A.$$

A 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，函数值的集合$\{f(x)|x\in A\}$称为函数的**值域**．定义域、值域和对应法则称为函数的三要素．

例 1 已知 $f(x)=x^2+x+1$，求 $f(-1)$，$f(\sqrt{2})$，$f(a)$，$f(a^2)$.

解 $f(-1)=(-1)^2-1+1=1$；$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}+1=3+\sqrt{2}$；$f(a)=a^2+a+1$；$f(a^2)=(a^2)^2+a^2+1=a^4+a^2+1$.

例 2 求下列函数的定义域．

(1)$f(x)=\sqrt{2x+1}$；(2) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$；(3) $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2-x}$.

解 (1) 因为 $2x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\dfrac{1}{2}$，所以函数的定义域为$\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)因为 $x=1$，分式$\dfrac{1}{x-1}$无意义，所以函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(3)由题意得$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\2-x\neq 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\geqslant 1\\x\neq 2\end{cases}$，所以这个函数的定义域为$[1,2)\cup(2,+\infty)$.

一般情况下，在求函数的定义域时，可以从以下几个方面考虑：

(1)幂函数中，偶次开方的被开方数大于等于零．

(2)分式的分母不能为零．

(3)对数函数的真数大于零．

例 3 下列函数中，与 $y=x$ 相同的函数是哪一个？

(1)$y=\sqrt{x^2}$；(2) $y=\sqrt[3]{x^3}$；(3) $y=(\sqrt{x})^2$；(4) $y=\dfrac{x^2}{x}$.

解 (1) $y=\sqrt{x^2}=|x|$与 $y=x$ 虽然定义域都是R，但是对应法则和值域都不同，

$y=\sqrt{x^2}$ 的值域为 $y\geqslant 0$，而 $y=x$ 的值域为R，所以两个函数不同．

(2) $y=\sqrt[3]{x^3}=x$，它与 $y=x$ 的定义域，对应法则，值域都相同．所以两个函数相同．

(3) $y=(\sqrt{x})^2=x(x\geqslant 0)$，与函数 $y=x(x\in R)$虽然对应关系相同，但定义域不同，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$，所以这两个函数不相同．

(4) $y=\dfrac{x^2}{x}=x(x\neq 0)$与 $y=x(x\in R)$虽然对应法则相同，但是定义域和值域不同，所以两个函数不相同．

函数的表示方法主要有以下三种：**解析式法、列表法和图像法**．

在定义域的不同范围内用不同的解析式分段表示的函数叫做**分段函数**．

几个常见的分段函数：

(1)绝对值函数(如图 1-2 所示)

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\0, & x=0,\\-x, & x<0.\end{cases}$$

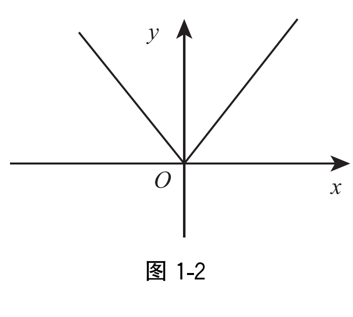


图 1-2

(2) 符号函数(如图 1-3 所示)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

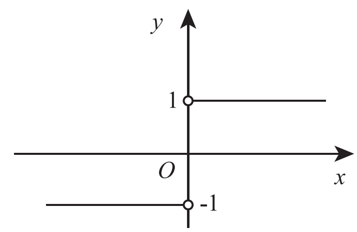


图 1-3

例 4　设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, x\geqslant 0,\\ x^2-1, x<0.\end{cases}$$

求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$.

解　因为 $-1\in(-\infty,0)$,所以 $f(-1)=(-1)^2-1=0$;

因为 $0\in[0,+\infty)$,所以 $f(0)=0+1=1$;

因为 $1\in[0,+\infty)$,所以 $f(1)=1+1=2$.

三、函数的性质

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,当区间 $I\subset D$ 时,若存在一个正数 M,使得对于任意 $x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,称函数 $f(x)$在 I 上**有界**. 如果不存在这样的正数 M,称函数 $f(x)$在 I 上**无界**. 特别的,如果存在一个数 M_1,使得 $f(x)\leqslant M_1$,称函数 $f(x)$在 I 上有**上界**. 如果存在一个数 M_2,使得 $f(x)\geqslant M_2$,称函数 $f(x)$在 I 上有**下界**.

例如函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的,因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$都有 $|\sin x|\leqslant 1$.

有界函数的图像必介于两条直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

2. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递增**;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递减**. 单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**.

例如函数 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,0)$上是单调递减,在$(0,+\infty)$上是单调递增.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$恒成立,称函数 $f(x)$为**偶函数**. 如果对于任意 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$恒成立,称函数 $f(x)$为**奇函数**.

例如函数 $f(x)=x^2$,$f(x)=\cos x$ 等都是偶函数,$f(x)=x^3$,$f(x)=\sin x$ 等都是奇函数.

几何意义:偶函数的图像是关于 y 轴对称的;奇函数的图像是关于原点对称的.

4. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,若存在一个非零常数 T,对于任意 $x\in D$,总有 $f(x+T)=f(x)$成立,则称 $f(x)$是**周期函数**,称 T 是它的一个周期.

例如 2π 是函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的一个周期,π 是函数 $y=\tan x$ 的一个周期.

习题 1-1

1. 用区间表示下列函数的定义域．

(1)$y=\dfrac{1}{x+1}$；　(2) $y=\sqrt{x-3}$；　(3) $y=\sqrt{x^2-4}$；

(4)$y=\sqrt{1-x}$；　(5) $y=\log_2(x+1)$；　(6) $y=\ln(x^2+1)$；

(7)$y=\dfrac{1}{x-4}+\sqrt{x+3}$；　(8) $y=\dfrac{1}{x-2}+\lg(x-1)$；　(9) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

2. 已知 $f(x)=x^2+2$,求 $f(0)$,$f(1)$,$f(-1)$.

3. 下列各对函数是否相同．

(1)$y=\lg(x^2)$,$y=2\lg x$；　(2) $y=x+1$,$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

4. 确定下列函数的奇偶性．

(1)$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；(2) $y=x\sin x$.

第二节　初等函数

一、基本初等函数

常数函数 $y=c$(c 为常数)；

幂函数 $y=x^\mu$(μ 为常数)；

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$,$y=e^x$；

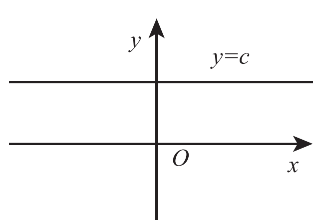
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$,$y=\ln x$；

三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$；

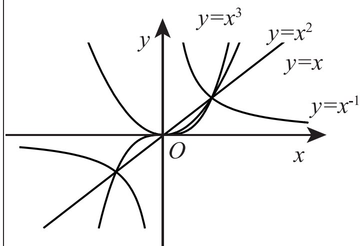
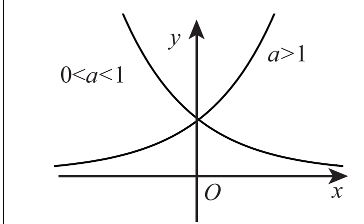
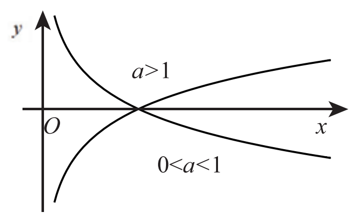
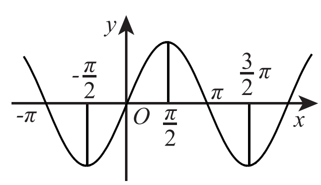
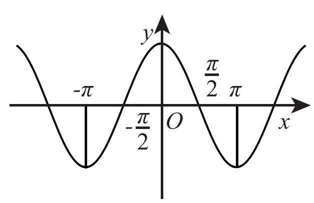
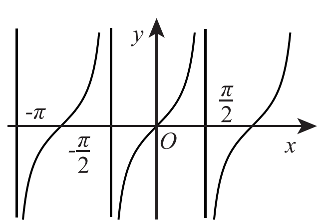
反三角函数 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$.

这六类函数被称为**基本初等函数**．基本初等函数的图像及其性质如表 1-1 所示．

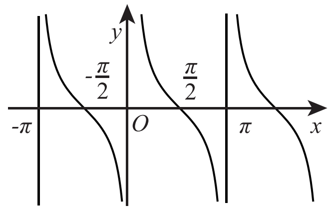
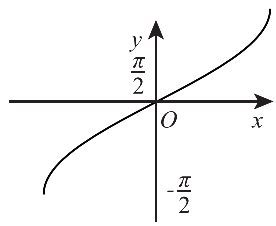
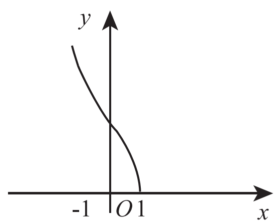
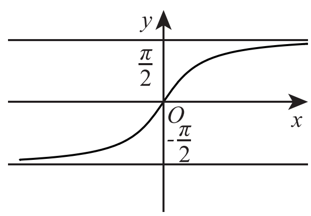
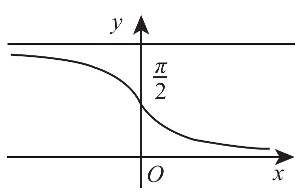
表 1-1

名称	表达式	定义域	图像	性质
常数函数	$y=c$	$(-\infty,+\infty)$		过点$(0,c)$ 与 x 轴平行

续表

名称	表达式	定义域	图像	性质
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq 0)$	其定义域与值域因 μ 的取值不同而不同		过点$(1,1)$
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		(1)在 x 轴上方,过点$(0,1)$ (2)当 $0<a<1$ 时,单调递减; 当 $a>1$ 时,单调递增
对数函数	$y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		(1)在 y 轴右侧,过点$(1,0)$ (2)当 $0<a<1$ 时,单调递减; 当 $a>1$ 时,单调递增
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		(1)奇函数,周期为 2π,有界 (2)在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增; 在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$ 上单调递减
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		(1)偶函数,周期为 2π,有界 (2)在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 上单调递增; 在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上单调递减
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in \mathrm{Z})$		(1)奇函数,周期为 π (2)在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增 $k\in \mathrm{Z}$

续表

名称	表达式	定义域	图像	性质
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$		(1)奇函数,周期为 π (2)在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调递减 $k\in \mathbf{Z}$
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		奇函数,单调递增,有界
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调递减,有界
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数,单调递增,有界
反余切函数	$y=\mathrm{arccot}\, x$	$(-\infty,+\infty)$		单调递减,有界

二、复合函数

函数 $y=e^{2x}$ 不是基本初等函数,但可由基本初等函数 $y=e^{u}$ 和 $u=2x$ 组合而成.

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=g(x)$,若 $u=g(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中,则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数,称为**复合函数**,记作

$$y=f(g(x)).$$

其中 x 是自变量,u 是中间变量.

例 1 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin^{2}x$;　　(2) $y=\sin x^{2}$;

(3) $y=(x^2+1)^3$；　　(4) $y=e^{\sqrt{x^2-1}}$.

解　(1) $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的 .

(2) $y=\sin x^2$ 是由 $y=\sin u$，$u=x^2$ 复合而成的 .

(3) $y=(x^2+1)^3$ 是由 $y=u^3$，$u=x^2+1$ 复合而成的 .

(4) $y=e^{\sqrt{x^2-1}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2-1$ 复合而成的 .

三、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合并且能用一个数学表达式表示的函数称为**初等函数** .

例如函数 $y=\sin^2(3x+1)$，$y=\dfrac{\ln x+2\tan x}{10^x-1}$，$y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 都是初等函数 .

例如分段函数 $y=\begin{cases}x^2+1, x\geqslant 0,\\ -x^2-1, x<0\end{cases}$ 不能用一个式子表示，所以不是初等函数 .

又如幂指函数 $y=x^x$ 不是初等函数，因为它既不是基本初等函数四则运算合成的，也不是基本初等函数经过有限次复合而成的 .

习题 1-2

1. 指出下列函数的复合过程 .

(1) $y=(3x+1)^3$；　(2) $y=e^{-x}$；　(3) $y=\cos(2x+1)$；

(4) $y=\ln(x^2+3)$；　(5) $y=\sin 3^x$；　(6) $y=e^{\cos x}$；

(7) $y=\tan(2x^2+1)$；　(8) $y=(x^3+4)^5$；　(9) $y=\ln\cos x$；

(10) $y=\sin\sqrt{x-1}$；　(11) $y=(x^2-1)^{-2}$；　(12) $y=\sqrt{x^3+3}$.

第三节　函数模型的建立

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直与各种各样的应用问题紧密相关的 . 数学模型是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定的目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到一个数学结构 .

数学结构是指数学符号、数学关系式、数学命题、图形图表等，这些基于数学思想与方法的数学问题 .

数学建模是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段 . 研究数学模型，建立数学模型，进而借鉴数学模型，对提高解决实际问题的能力，以及数学素养是十分重要的 .

建立函数模型的步骤可分为：

(1)审题：弄清题意，分清条件和结论，理顺数量关系 .

(2)建模：将文字语言转化成数学语言，用数学知识建立相应的数学模型 .

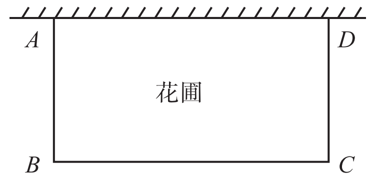
(3)求模：求解数学模型，得到数学结论 .

(4)还原：将用数学方法得到的结论还原为实际问题的意义.

例 1 圆的面积 S 与它的半径 r 之间的关系可表示为：$S=\pi r^2$.

例 2 一张纸的层数 y 与折叠次数 x 的关系为：$y=2^x$.

例 3 用 32 米的篱笆围成一个矩形花圃，其中一边利用墙. 求 AB 的长 x 米与矩形 ABCD 的面积 S 的函数关系.



解

$$
\begin{aligned}
S &= x(32-2x) \\
&= -2x^2+32x \qquad 0<x<16.
\end{aligned}
$$

例 4 已知某城市 2019 年底的人口总数为 200 万，假设此后该城市人口的年增长率为 1%(不考虑其他因素).

(1)若经过 x 年人口总数为 y 万，写出 y 关于 x 的函数关系式；

解 $y=200\times(1+1\%)^x=200\times(1.01)^x$.

(2)如果该城市人口总数达到 210 万，那么至少需要经过多少年.

解 $200\times(1+1\%)^x=210$，得 $x=\log_{1.01}1.05\approx5$. 所以至少经过 5 年.

例 5 重力为 P 的物体置于地平面上，设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体由静止开始运动，求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

解 由物理知识可知，当水平拉力与摩擦力平衡时，物体开始移动，而摩擦力是与正压力 $P-F\sin\alpha$ 成正比的，设摩擦系数为 μ，故有

$$F\cos\alpha=\mu(P-F\sin\alpha),F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha},(0^\circ\leqslant\alpha\leqslant90^\circ).$$

例 6 移动公司规定短信的收费标准为：当月所发短信不超过 500 条，只收月租费 25 元；超过 500 条的，每条加收 0.1 元，求短信费用和用户当月所发短信条数的关系.

解

$$y=\begin{cases}25 & x\leqslant500,\\ 25+0.1(x-500) & x>500.\end{cases}$$

例 7 一批商品进货价为 80 元，按 90 元一个售出时，可卖出 400 个. 已知这种商品每涨价 1 元，其销售数量就减少 20 个，销售价为多少元时利润最大，最大利润为多少元?

分析 题中显示“利润最大”的语句，因此，应从构造利润的函数关系入手.

解 设销售价为 $90+x$ 时，利润为 y，此时销售数量为 $400-20x$.

$$
\begin{aligned}
y &=(90+x)(400-20x)-(400-20x)\times80 \\
&=-20x^2+200x+4000 \\
&=-20(x-5)^2+4500.
\end{aligned}
$$

所以当 $x=5$ 时，$y_{\max}=4500$. 即销售价为 95 元时所获得的利润最大，最大值为 4500 元.

例 8 某工厂在甲、乙两地的两个分厂各生产某种机器 12 台和 6 台. 现销售给 A 地 10 台，B 地 8 台. 已知从甲地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元，从乙地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 300 元和 500 元. 求出总运费最低的调运方案和最低费用.

解 本题数量关系较多，利用列表法将数量关系明朗化，有利于函数模型的建立，由甲、乙两地调运 A 地、B 地的机器台数及运费如下表：

调出地	甲		乙	
调至地	A	B	A	B
台数	x	$12-x$	$10-x$	$6-(10-x)$
每台运费(元)	400	800	300	500
运费合计(元)	$400x$	$800(12-x)$	$300(10-x)$	$500(6-(10-x))$

设费用为 y，得

$$\begin{aligned} y &= 400x+800(12-x)+300(10-x)+500(6-(10-x)) \\ &= -200x+10600 \quad 4\leqslant x\leqslant 10, \quad x\in Z. \end{aligned}$$

所以当 $x=10$ 时，$y_{\min}=8600$. 即甲地调运至 A 地 10 台，B 地 2 台，乙地调运至 B 地 6 台时总运费最低，最低费用为 8600 元．

建立函数模型没有固定的模式，通常它与实际问题的性质、建模的目的等有关．当然建模的过程也有其共性，要弄清楚问题的实际背景和意义，设法用数学语言来描述问题，以所学的数学知识为工具对建立的数学模型进行求解，给出其实际意义，最后对所建立的模型给出应用范围．

习题 1-3

1. 用一根长 $12m$ 的铁丝折成一个矩形的铁框架，则能折成的框架的最大面积是多少？

2. 某厂生产产品 1000 吨，定价为 130 元/吨，当售出量不超过 700 吨时，按原价出售，超过 700 吨的部分按照原价的九折出售，试将销售收入表示成销售量的函数．当售出产品 850 吨时，销售收入是多少元？

3. 某人花 100 万元买了一套住房，其中首付 30 万元，70 万元采用商业贷款，利率为5%，每月等额还贷一次，30 年还清，并从贷款后的次月开始还贷，则每月应还贷多少元？

综合练习一

1. 求下列函数的定义域．

(1) $f(x)=\sqrt{3x-1}$；(2) $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$；(3) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$；

(4) $f(x)=\lg(4x-3)$；(5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-4}$；(6) $f(x)=\ln(x^2)$.

2. 已知 $f(x)=x^2+1$，求 $f(0)=$________，$f(x+1)=$________，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$________．

3. 已知 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，$f(g(x))=$________．

4. 写出下列函数的复合过程．

(1) $y=\cos x^2$；(2) $y=\cos^2 x$；(3) $y=\sin^2(x^2+1)$；

(4) $y=(x^2+1)^5$；(5) $y=\ln(x+1)$；(6) $y=e^{\sin x}$.

5. 某产品进货单价 40 元，按 50 元一个出售可卖出 500 个，若每涨价 1 元，其销售量就减少 10 个．问定价为多少元时利润最大，最大利润是多少元．