目　　录

第一章　极限与连续

（一）学习目标

1. 了解函数概念,熟练掌握基本初等函数的性质及其图形,会建立简单实际问题的函数关系.

2. 理解数列及函数极限的定义.

3. 熟练掌握复合函数的复合过程及求极限的方法.

4. 会比较无穷小量,判断函数的连续性.

（二）学习重点和难点

重点　函数极限的计算及连续性的判断.

难点　分析复合函数结构;掌握两个重要极限;判断分段函数的连续性.

在经济问题的研究过程中,一个经济变量往往与多种因素相关,或者说其中一个量的变化要受到其他一些变化量的制约,这种制约关系就是函数关系,函数是数学中最重要的基本概念之一,是现实世界中刻画运动变化的量与量之间的依存关系的数学模型,也是微积分学的主要研究对象. 极限又是研究微积分的工具,它作为重要的思想方法始终贯串于经济数学之中.

本章先对中学学过的函数进行复习和补充,并介绍一些经济学中常用的函数,然后,重点研究极限的概念与性质,极限的运算及函数的连续性.

§1.1　函数的概念与性质

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　设 D 是一个数集,如果对属于 D 中的任意 x,按照对应法则 f,都有唯一确定的实数 y 与之相对应,则称 y 为 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 其中 x 为**自变量**,y 为**因变量**,数集 D 为函数的**定义域**,与 x 相对应的 y 值称为函数值,当 x 取 x_0 时,记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$,函数值的集合

$$Y=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的**值域**.

例如,生产某种产品的固定成本为3200元,每生产一件产品,成本增加30元,那么该种产品成本 y 与产量 x 之间的函数关系可表述为:

$$y = 3200 + 30x$$

它的定义域 $D = [0, +\infty)$,值域是 $[3200, +\infty)$.

当产量为50件时,总成本

$$y\big|_{x=50} = 3200 + 30 \times 50 = 4700(\text{元}).$$

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} 3x, x \leqslant 0, \\ x^2, x > 0. \end{cases}$

解 (1) 要使函数有意义,则必须满足 $x-2 \geqslant 0$ 且 $x \neq 4$,故函数的定义域为 $[2,4) \cup (4, +\infty)$.

(2) 该函数是分段函数,分段函数的定义域是各段函数定义域的并集,故函数的定义域为全体实数 $\mathbf{R}$.

注意:常见的定义域约束条件如下.

① 分母不能为零;

② 根号开偶次方根,例如 $y = \sqrt{f(x)}$,$f(x) \geqslant 0$;根号开奇次方根,例如 $y = \sqrt[3]{f(x)}$,$f(x) \in \mathbf{R}$;

③ 对数函数的真数必须大于零;

④ 分段函数的定义域为各段函数定义域的并集;

⑤ 若函数式是上述的混合式,则应取各部分定义域的交集.

2. 函数的两要素

函数的两要素是函数的定义域和对应法则. 两个函数,只要它们的定义域和对应法则相同,就是相同的函数,与用什么字母和符号表示自变量和因变量无关.

例如,$y = x^2$ 与 $y = t^2$ 就是相同的函数.

例 2 判断下列函数是否相同:

(1) $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

(2) $y = \ln x^3$ 与 $y = 3\ln x$

(3) $y = 4x$ 与 $y = 4u$

解 (1) 不相同,因为对应法则不同;(2) 不相同,因为定义域不同;(3) 相同.

3. 函数的表示法

函数的表示法就是用来确定函数的对应法则的方法. 常见的函数的表示法有三种:解析法、表格法和图表法.

下面分别举一个例子.

例 3　$y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$.

这是用解析法表示的函数关系，它的定义域是

$$D=[-1,0)\cup(0,1].$$

例 4　某商店一年中各月份大米的销售量（单位：10^2kg）如下表所示：

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	81	84	45	46	89	25	36	55	94	113	144	132

这是用表格法表示的函数关系，它的定义域是

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}.$$

例 5　图 1-1 是某地区一天的气温变化情况. 时间 t 与温度 T 之间的函数关系由图中曲线表示出来.

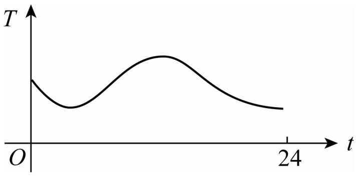

图 1-1

4. 分段函数

有些函数对于不同取值范围的自变量 x，函数采用不同的解析表达式，这种函数叫作**分段函数**.

例 6　已知某快递公司的快件收费标准为：1kg 以内（含 1kg）8 元；超过 1kg，超重部分按每 kg 收取 2 元费用，但总重不超过 10kg. 试列出该快递公司快件的运费与快件的重量之间的函数关系式，写出其定义域，并求出所送快件分别为 1kg，10kg 的甲、乙两位顾客各应支付多少运费？

解　设快件重量为 $x$kg，则快件的运费为：

$$f(x)=\begin{cases}8, & x\in[0,1]\\ 8+2(x-1), & x\in(1,10]\end{cases}$$

所以，$f(1)=8$（元），$f(10)=8+2(10-1)=8+18=26$（元）

5. 隐函数

有些函数是由自变量的解析式表示出来的，这类函数称为**显函数**，常以 $y=f(x)$ 表示. 如 $y=x^2+1$，$S=\pi r^2$ 等. 而有些函数关系由方程 $F(x,y)=0$ 确定，如 $x^2+y^2=1$，$xy=\sin(x+y)$ 等，这类函数中，x 与 y 的对应关系隐含在方程中，通常称为**隐函数**.

二、函数的性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果对 D 中任意两个数 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ [\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)].$$

则称 $f(x)$ 在数集 D 上**单调增加**(或**单调减少**),简称**单增**(或**单减**). 若当 $x_1 < x_2$ 时,总有

$$f(x_1) < f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在数集 D 上**严格单增**(或**严格单减**).

单增和单减的函数统称为**单调函数**,严格单增和严格单减的函数统称为**严格单调函数**.

例如函数 $f(x) = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内是严格单增的,因为对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,有

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

当 $x_1 < x_2$ 时,由于 $x_1 - x_2 < 0$,而

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0,$$

故总有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,即 $f(x_1) < f(x_2)$.

又如函数 $g(x) = x^2$ 在区间$(-\infty, 0]$ 上严格单减,在区间$[0, +\infty)$ 上严格单增,但在整个区间内却不是单调的. 这说明函数的单调性亦与数集 D 有关.

2. 奇偶性

设 $y = f(x), x \in D$,其中 D 关于原点对称,即当 $x \in D$ 时有 $-x \in D$. 如果对任意 $x \in D$,总有

$$f(-x) = -f(x)\ (\text{或 } f(-x) = f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**(或**偶函数**).

例如,$f(x) = x^3$ 是奇函数,$g(x) = x^2$ 是偶函数,因为对任意 $x \in \mathbf{R}$,总有

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x),$$

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$$

又如在三角函数中,正弦函数 $y = \sin x$ 是奇函数,余弦函数 $y = \cos x$ 是偶函数,而 $y = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

在坐标平面上,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

3. 周期性

设函数 $y = f(x), x \in D$. 若存在常数 $l \neq 0$,使对任意 $x \in D$,总有

$$f(x + l) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function),l 称为 $f(x)$ 的一个周期. 显然,若 l 为 $f(x)$ 的一个周期,则 $kl\ (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 也都是它的周期. 所以一个周期函数一定有无穷多个周期. 通常所说周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如,三角函数中,$\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数,$\tan x$ 和 $\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间(a,b) 上有定义,如果存在一个正数 M,使得对所有 $x \in (a,b)$,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在(a,b) 内**有界**. 如果不存在这样的 M,则称 $f(x)$ 在(a,b) 上**无界**.

注意:

(1) 函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界,是指函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的一段图像被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间,如图 1-2 所示.

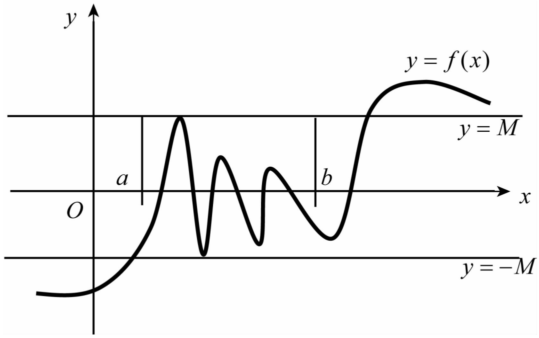

图 1-2

(2) 当函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界时,正数 M 并不唯一. 如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,$|\sin x|\leqslant 1$,但也可取 $M=2$,即 $|\sin x|<2$,事实上,任何大于 1 的数都可取做 M.

(3) 函数的有界性依赖于区间,如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界,但在 $(0,1)$ 内却是无界的.

三、反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 若对 W 中每一个 y 值,存在唯一满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应,则得到一个定义在 W 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数 $x=\varphi(y)$,我们称其为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y),y\in W$$

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**原函数**.

由定义可知,反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是它的原函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 因此也可以说两者互为反函数.

习惯上,我们总是以 x 表示自变量,用 y 表示自变量的函数,所以通常把 $y=f(x)$ 的反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$.

在同一个坐标系中,$y=f(x)$ 的图像与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-3 所示.

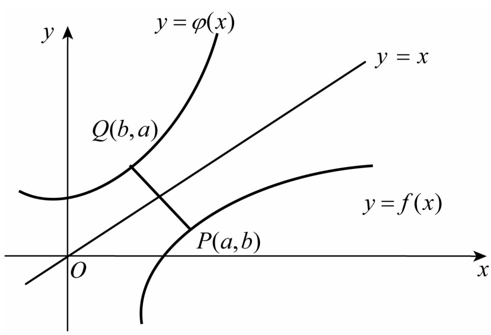

图 1-3

例 7　求 $y=2x-1$ 的反函数.

解　由 $y=2x-1$,得 $x=\dfrac{y+1}{2}$,即所求的反函数为 $y=\dfrac{x+1}{2}$.

四、基本初等函数

微积分学中,我们将常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数称为**基本初等函数**.

1. 常数函数

$$y = c(c\text{ 为常数})$$

定义域为$(-\infty, +\infty)$,它的图形是一条平行于 x 轴且截距为 c 的直线,如图 1-4 所示.

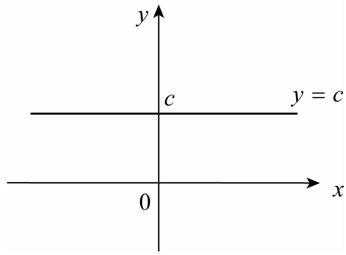

图 1-4

2. 幂函数

$$y = x^{\mu}(\mu \in \mathbf{R}, \mu \neq 0)$$

它的定义域,当 μ 是正整数时为$(-\infty, +\infty)$,当 μ 是负整数时为不为零的一切实数. 当 μ 是有理数或无理数时情况比较复杂. 但不论 μ 为何值,幂函数在$(0, +\infty)$ 内总有定义. 而且它的图形都过点$(1,1)$. 常见的几种幂函数图像如图 1-5 所示.

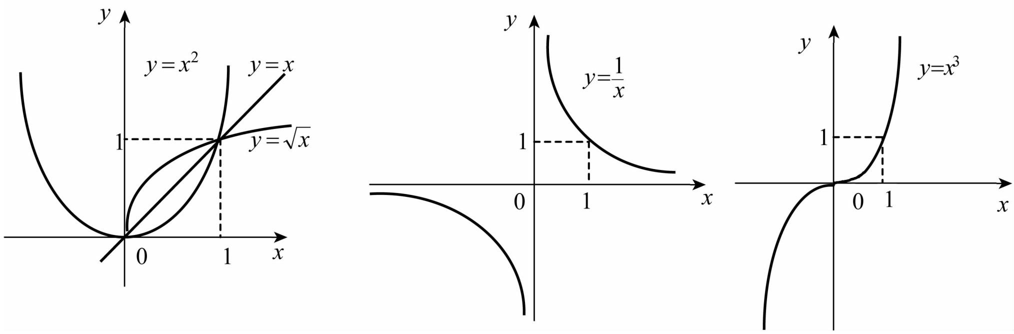

图 1-5

3. 指数函数

$$y = a^x(a > 0, a \neq 1).$$

定义域为$(-\infty, +\infty)$. 任意 $x \in \mathbf{R}$,总有 $a^x > 0$,且 $a^0 = 1$,所以指数函数的图形位于 x 轴的上方,且通过点$(0,1)$. 值域为$(0, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时为严格单增函数;当 $0 < a < 1$ 时为严格单减函数,如图 1-6 所示. 常用的指数函数是 $y = \mathrm{e}^x$,其中 $\mathrm{e} = 2.7182818284\cdots$ 为无理数.

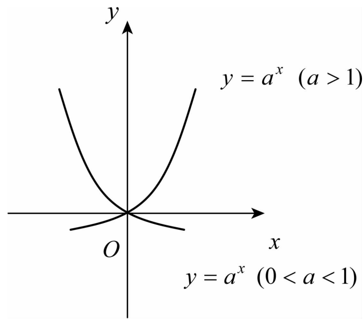

图 1-6

4. 对数函数

$$y = \log_a^x(a > 0, a \neq 1).$$

它是指数函数 $y = a^x$ 的反函数,所以它的定义域为$(0, +\infty)$,值域为$(-\infty, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时为严格单增函数,当 $0 < a < 1$ 时为严格单减函数. 它的图形位于 y 轴的右方,且通过点$(1,0)$,如图 1-7

所示. 工程数学中常常用到以 e 为底的对数函数 $y=\log_e^x$,称为自然对数,并简记为 $y=\ln x$.

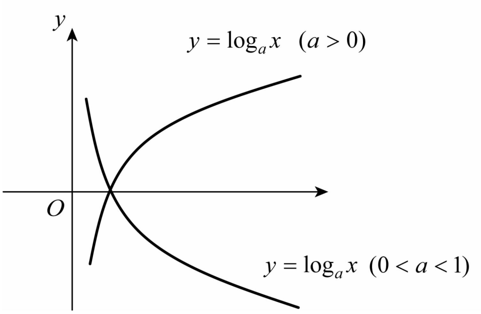

图 1-7

5. 三角函数

正弦函数:$y=\sin x$,定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$[-1,1]$,是奇函数,即 $\sin(-x)=-\sin x$,最小正周期为 2π,是有界函数. 图像如图 1-8 所示.

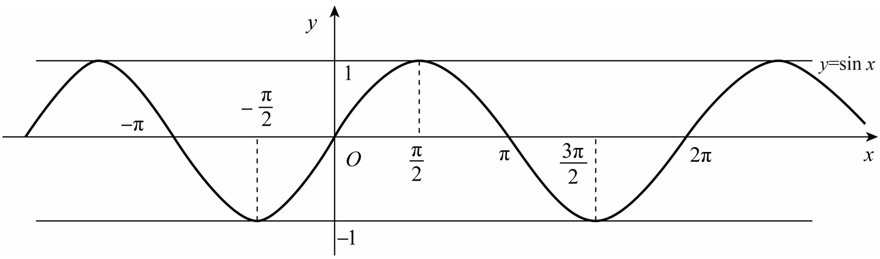

图 1-8

余弦函数:$y=\cos x$,定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$[-1,1]$,是偶函数,即 $\cos(-x)=\cos x$,最小正周期为 2π,是有界函数. 图像如图 1-9 所示.

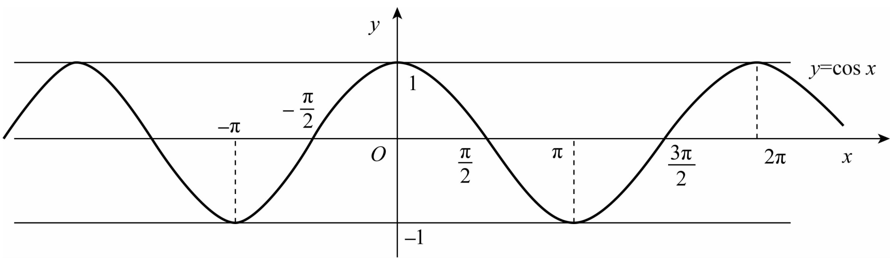

图 1-9

正切函数:$y=\tan x$,定义域 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,值域$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,即 $\tan(-x)=-\tan x$,最小正周期为 π,是无界函数. 图像如图 1-10 所示.

余切函数:$y=\cot x$,定义域 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$,值域$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,即 $\cot(-x)=-\cot x$,最小正周期为 π,是无界函数. 图像如图 1-11 所示.

此外,正割函数 $y=\sec x$,$\sec x=\frac{1}{\cos x}$,余割函数 $y=\csc x$,$\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

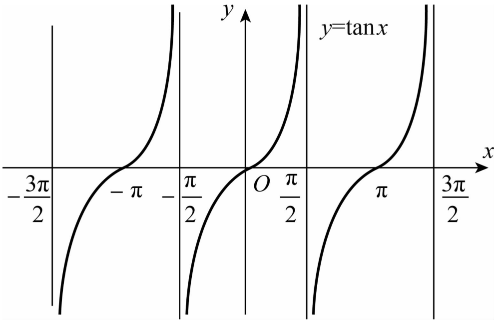

图 1-10

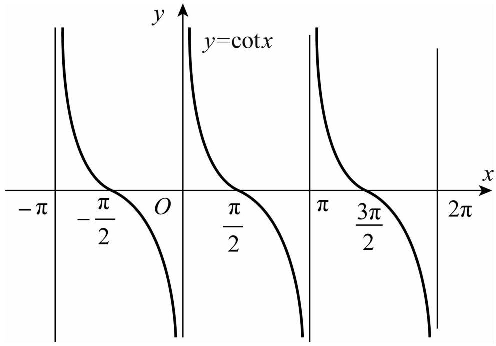

图 1-11

6. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，由于三角函数都是周期函数，我们在各个三角函数中适当选取它们的一个严格单调区间来研究其反函数，常用的反函数有四个：

反正弦函数　　$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

反余弦函数　　$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$；

反正切函数　　$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

反余切函数　　$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$.

它们的图形如图 1-12 所示.

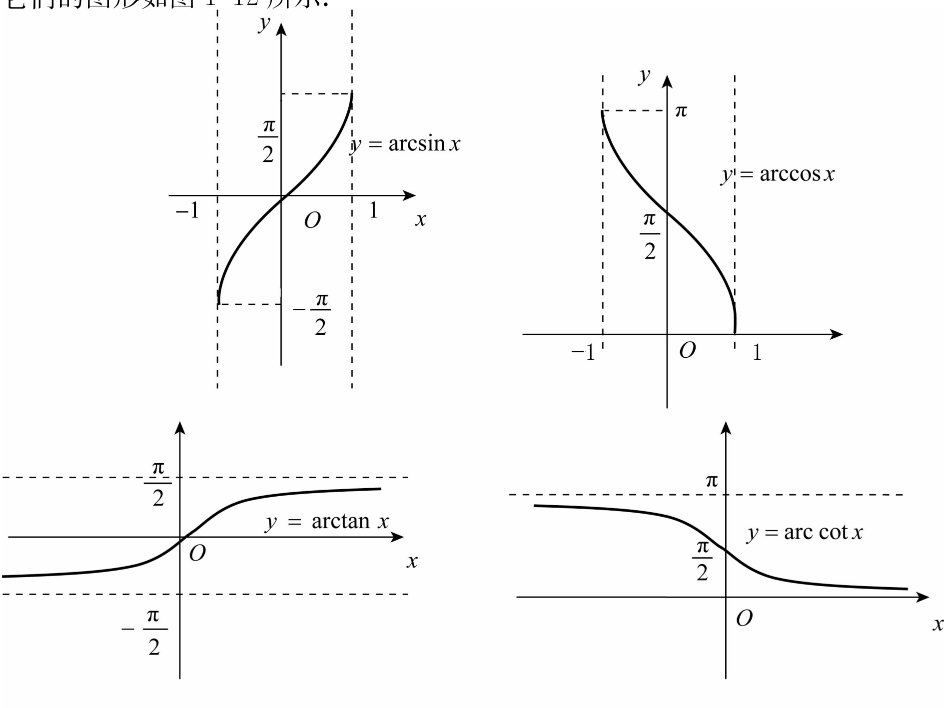

图 1-12

五、复合函数

定义 1.3　设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域全部落在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**，u 称为中**间变量**.

注意：

两个函数复合的过程，其实就是用内函数表达式来代替外函数表达式中的自变量，使之成为复合函数的表达式. 这里涉及外函数、内函数和复合函数，当已知其中某两个函数时，我们可以通过其复合关系求出另一个函数.

例 8　设 $f(x)=\begin{cases}1+x, x<0\\ 1,\ x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

解　$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), f(x)<0,\\ 1,\ f(x)\geqslant 0,\end{cases}$

易知当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x<0$，

而 $f[f(x)]=1+f(x)=1+(1+x)=2+x$. 当 $x\geqslant -1$ 时，无论 $-1\leqslant x<0$ 及 $x\geqslant 0$. 均有 $f(x)\geqslant 0$，从而 $f[f(x)]=1$. 所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, x<-1\\ 1,\ x\geqslant -1\end{cases}.$$

例 9　分析下列复合函数的结构：

(1) $y=\sin^3 x$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}}$.

解　(1) $y=u^3, u=\sin x$.

(2) $y=\mathrm{e}^u, u=\tan v, v=\dfrac{x}{2}$.

六、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合步骤构成，且用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

例如函数

$$y=\sqrt{1+x^2}, y=3\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right), y=x2^{\sin x}-\frac{1}{x}-\log_2(1+2x^2)$$

都是初等函数.

根据定义可知，分段函数不是初等函数.

习　　题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x-2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}+\arcsin(x-3)$；　　(4) $y=\sin\sqrt{x}$.

2. 判断下列各组中两个函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=3\lg x, g(x)=\lg x^3$；

(2) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\sin x\cos x^2$；　　(2) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；　　(4) $y=\sin x+\cos x$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos x^2$；　　(2) $y=\ln\ln\sin x$；

(3) $y=(2-4x)^2$；　　(4) $y=\sin^2(x+1)$；

(5) $y=\sqrt{e^{\sin x}}$；　　(6) $y=\ln(1+x^2)$.

§1.2　常用的经济函数

为解决实际应用问题,首先要将该问题量化,从而建立起该问题的数学模型,即建立函数关系,本节介绍几个常见的经济函数.

一、需求函数

一种商品的需求量 Q 与该种商品的价格 p 密切相关,如果不考虑其他因素的影响,则商品的需求量 Q 可看作价格 p 的函数,称为**需求函数**,记作 $Q=f(p)$.

一般地需求量随价格的上升而减少. 因此,需求函数 $Q=f(p)$ 是价格 p 的单调减少函数.

常见的需求函数有以下几种类型：

(1) 线性需求函数：$Q=a-bp\ (a>0, b>0)$，

(2) 二次需求函数：$Q=a-bp-cp^2\ (a>0, b>0, c>0)$，

(3) 指数需求函数：$Q=ae^{-bp}\ (a>0, b>0)$.

例 1　书店售书,当该书售价为 18 元 / 本时,每天销售量为 100 本,售价每提高 0.1 元,销售量则减少 5 本,试求需求函数.

解　设需求量为 Q，该书售价为 p 元 / 本，由题意：

$$Q = 100 - \frac{p-18}{0.1} \times 5,$$

即 $Q = 50(20-p)$.

由此可以看出，需求函数是单调减少函数，且该书的售价不能超过 20 元 / 本，否则就没有销路.

二、供给函数

"供给量" 是在一定价格水平下，生产者愿意出售并且有可供出售的商品量，如果不考虑价格以外的其他因素，则商品的供给量 Q 是价格 p 的函数：$Q = g(p)$，称为**供给函数**.

一般地，供给量随价格的上升而增大，因此，供给函数 $Q = g(p)$ 是价格 p 的单调增加函数.

常见的供给函数有线性函数、二次函数、指数函数等. 其中，线性供给函数为 $Q = -c + dp(c > 0, d > 0)$.

如果市场上某种商品的需求量与供给量相等，则该商品市场处于平衡状态，这时的商品价格 p_0 称为市场平衡价格.

当市场价格 $p > p_0$ 时，供应量将增加而需求量减少，这时产生的"供大于求" 的状态会使商品的价格下降；当市场价格 $p < p_0$ 时，供应量减少而需求量增加，这时出现的"物资短缺" 现象会使价格上升，市场价格的调节就是这样实现的.

例 2　设某本书的价格为 18 元 / 本时，书商可每天提供 100 本，价格每增加 0.1 元，书商可多提供 5 本书，试求供给函数.

解　设该书售价为 p 元 / 本，供给量为 Q，由题意

$$Q = 100 + \frac{p-18}{0.1} \times 5,$$

即 $Q = 50(p-16)$.

由此可知，供给函数是单调增加函数，当价格上涨时，书商提供的书的数量会增加.

例 3　由例 1、例 2 求该书的市场平衡价格 p_0.

解　由 $\begin{cases} Q = 50(20-p), \\ Q = 50(p-16), \end{cases}$

得 $p_0 = 18$.

由此可知，该书的市场平衡价格为 18 元 / 本，高于这个价格，供过于求；低于这个价格，供不应求.

三、成本函数

总成本是企业生产一种产品所需费用的总和，它通常分为固定成本 C_0 和可变成本

$C_1(Q)$ 两部分，即

$$C = C(Q) = C_0 + C_1(Q).$$

固定成本指不受产量变化影响的成本，如厂房、机器设备的费用等. 可变成本指随产量变化而发生变化的成本，如原材料费、工人工资、包装费等.

在经济分析中，常用到**平均成本** $\bar{C}(Q)$，

$$\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_0}{Q} + \frac{C_1(Q)}{Q},$$

其中$\frac{C_1(Q)}{Q}$ 称为**平均可变成本.**

例 4 生产某种商品的总成本是 $C(Q) = 500 + 4Q$，求生产 50 件这种商品时的总成本和平均成本.

解 生产 50 件这种商品时的总成本为：$C(50) = 500 + 4 \times 50 = 700$(元)；

平均成本为：$\bar{C}(50) = \frac{C(50)}{50} = \frac{700}{50} = 14$(元 / 件).

四、收入函数

收入是销售价格和销售量的乘积. 若价格为 p，销售量为 Q，总收入为 R，则有

$$R = R(Q) = pQ.$$

例 5 某商品的价格函数是 $p = 50 - \frac{1}{5}Q$，求该商品的收入函数，并求销售 10 件商品的总收入.

解 该商品的收入函数为 $R = R(Q) = pQ = (50 - \frac{1}{5}Q) \cdot Q = 50Q - \frac{1}{5}Q^2$，

销售 10 件商品的总收入为 $R(10) = 50 \times 10 - \frac{1}{5} \times 10^2 = 480$.

五、利润函数

利润是收入与成本的差，用 L 表示，

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

一般地

(1) 如果 $L(Q) = R(Q) - C(Q) > 0$，则生产处于盈利状态.

(2) 如果 $L(Q) = R(Q) - C(Q) < 0$，则生产处于亏本状态.

(3) 如果 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = 0$，则生产处于保本状态.

例 6 某商品的成本函数为 $C(Q) = 12 + 3Q + Q^2$，若销售单价定为 11 元 / 件，试求：

(1) 商品的利润函数；

(2) 商品经营活动的无亏盈点；

(3) 生产 5 件该商品的总利润；

(4) 若每天销售 10 件商品，为了不亏本，销售单价应定为多少才合适？

解　(1) 利润函数为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=11Q-(12+3Q+Q^2)=8Q-12-Q^2$.

(2) 令 $L(Q)=0$，解得两个无亏盈点 $Q_1=2$ 和 $Q_2=6$.

由 $L(Q)=8Q-12-Q^2=-(Q-2)(Q-6)$ 可以看出，当 $Q<2$ 或 $Q>6$ 时，都有 $L(Q)<0$，这时生产经营是亏损的；

当 $2<Q<6$ 时，$L(Q)>0$，因此，$Q_1=2$ 和 $Q_2=6$ 分别是盈利的最低产量和最高产量.

(3) 生产 5 件该商品的总利润为 $L(5)=8\times 5-12-5^2=3$(元).

(4) 设定价为 p 元 / 件，则利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=pQ-(12+3Q+Q^2)$，为了不亏本，须有 $L(10)\geqslant 0$，即 $10p-(12+3\times 10+10^2)\geqslant 0$，也就是 $p\geqslant 14.2$.

因此，为了不亏本，销售单价应不低于 14.2 元 / 件.

习　　题 1.2

1. 当鸡蛋的收购价为 5 元 /kg 时，某收购站每月能收购 5 000kg 鸡蛋，若收购价提高 0.1 元 /kg，则收购可增加 400kg，求鸡蛋的供给函数.

2. 某手表的价格为 70 元 / 只时，销售量是 10 000 只，若单价每提高 3 元，则需求量减少 3 000 只，求该手表的需求函数.

3. 某工厂生产某种产品，固定成本为 2 000 元，每生产一件产品，成本增加 5 元，若该产品销售单价为 9 元 / 台，试求利润函数和产量为 200 台时的平均成本.

4. 某服装厂生产衬衫的可变成本是每件 15 元，固定成本是 2 000 元，若每件衬衫售价是 20 元，则该厂每天生产 600 件衬衫的利润是多少？无盈亏产量是多少？

§1.3　极限的概念

一、数列的极限

1. 数列的概念

数列是按照一定的次序排列起来的一列数

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

简记为 $\{u_n\}$，u_n 称为数列的**通项**或**一般项**.

2. 数列的极限

定义 1.4　对于数列 $\{u_n\}$，如果当 n 无限增大时，通项 u_n 无限接近于一常数 A，则称 A 为数列 $\{u_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}u_n = A \text{ 或 } u_n \to A(n\to\infty).$$

极限存在,则称数列$\{u_n\}$**收敛**;否则,称数列$\{u_n\}$**发散**.

例 1 求下列数列的极限,并判断数列的敛散性.

(1)$\{u_n\} = \dfrac{1}{n}$; (2)$\{u_n\} = (-1)^n\dfrac{1}{n+1}$; (3)$\{u_n\} = n$.

解 (1) 极限为 0,数列收敛;

(2) 极限为 0,数列收敛;

(3) 极限不存在,数列发散.

定理 1.1 单调有界数列必有极限.

二、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.5 如果当$|x|$无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A,则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

2. 当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.6 如果$x>0$,当x无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A,则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

3. 当 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.7 如果$x<0$,当x无限减小时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A,则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

例如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

4. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

我们先介绍邻域和去心邻域的概念.

邻域:开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为以 x_0 为中心,以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的邻域,记作$U(x_0,\delta)$.

去心邻域:$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为以 x_0 为中心,以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的去心邻域,记作 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$.

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域$U(x_0,\delta)$内有定义,当x无限接近x_0时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A,则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

例如$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4.$

5. 当 $x \to x_0^{+}$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.9　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一右半邻域 $(x_0, x_0+\delta)$ 内有定义，当 x 从 x_0 右侧无限接近 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^{+}$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^{+}} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0^{+}).$$

6. 当 $x \to x_0^{-}$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.10　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一左半邻域 $(x_0-\delta, x_0)$ 内有定义，当 x 从 x_0 左侧无限接近 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^{-}$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^{-}} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0^{-}).$$

定理 1.2　极限存在的充要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^{-}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^{+}} f(x) = A$

例 2　设 $f(x) = \begin{cases} x+1, x<0 \\ x, 0 \leqslant x < 1 \\ 2-x, x \geqslant 1 \end{cases}$，讨论$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 是否存在？

解

$$\lim_{x \to 0^{-}}(x+1) = 1, \lim_{x \to 0^{+}} x = 0,$$
$$\lim_{x \to 1^{-}} x = \lim_{x \to 1^{+}}(2-x) = 1.$$

因为 $\lim\limits_{x \to 0^{-}}(x+1) \neq \lim\limits_{x \to 0^{+}} x$，所以由定理推知 $f(x)$ 当 $x \to 0$ 时极限不存在；又因为 $\lim\limits_{x \to 1^{-}} x = \lim\limits_{x \to 1^{+}}(2-x) = 1$，故由定理知 $f(x)$ 当 $x \to 1$ 时极限为 1.

三、极限的性质

性质 1（唯一性）　若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则它是唯一的.

性质 2（局部有界性）　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，使得 $|f(x)| \leqslant M$.

性质 3（局部保号性）　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$（或 <0），则对任意正数 $r(0<r<|A|)$，存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，使对一切 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，总有 $f(x) > r > 0$（或 $f(x) < -r < 0$）.

性质 4（夹逼定理）　若在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

习　　题 1.3

1. 用图像法判断下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1,\\ 2, & x=1,\\ 3x^3, & 1<x<3,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

§1.4　无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1.11　在自变量的某个变化过程中，极限为零的变量称为**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时都以零为极限，所以它们都是无穷小量或称为**无穷小数列**. 又如函数 $1-x^2$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小，函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

可见，除了数列只有 $n\to\infty$ 一种类型，对于定义在区间上的函数而言，单说此函数是无穷小是不够的，还必须指明自变量 x 的趋向，它包括 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^{\ +}$ 及 $x\to x_0^{\ -}$ 六种类型.

注意：

(1) 无穷小量是变量，不是很小的数，数字 0 除外；

(2) 无穷小量是针对自变量的某一变化趋势而言的.

1. 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍然是一个无穷小；

(2) 有限个无穷小的乘积仍然是一个无穷小；

(3) 无穷小与有界量(函数)的乘积是无穷小.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限.

解　因为当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，且对一切 $x\neq 0$ 总有 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有

界函数，所以 $x\sin\frac{1}{x}$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小，即

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

2. 无穷小量的比较

我们已经知道，两个无穷小的和、差及乘积仍然是无穷小，但两个无穷小的商却会出现不同的情况. 例如 $x,2x,x^2$ 都是当 $x\to 0$ 时的无穷小，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$，比的极限不同，这反映了不同的无穷小趋于零的速度的差异. 为了说明无穷小趋于零的速度的快慢程度，我们引入无穷小量的阶的概念.

定义 1.12　设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小**；

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**等价无穷小**，记作 $\alpha\sim\beta$；

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小**，记作 $\alpha=o(\beta)$；

(4) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**低阶无穷小**.

由定义可知，在 $x\to 0$ 时，x 与 $2x$ 是同阶无穷小；x^2 是比 $2x$ 高阶的无穷小；$2x$ 是比 x^2 低阶的无穷小.

定理 1.3(等价无穷小的替换定理)

设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\alpha'}$$

注意：当 $x\to 0$ 时，常见的等价无穷小替换公式：

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{x}{n}$.

例 2　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arctan x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　(1) 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x\sim 2x$，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$；

(2) 当 $x\to 0$ 时，$\tan 3x\sim 3x$，$\arcsin 2x\sim 2x$，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$；

(3) 当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+2x) \sim 2x$，$\arcsin x \sim x$，原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x} = 2$；

(4) 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$；

(5) 当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

二、无穷大量

定义 1.13 在自变量的某个变化过程中，如果 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为这一变化过程中的**无穷大量**，简称**无穷大**.

例如，函数 $y = \dfrac{1}{x}$，$y = \dfrac{1}{\sin x}$ 是在 $x \to 0$ 时的无穷大量. 又如函数 $y = x^2$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷大.

注意：

(1) 无穷大是变量，不是很大的数；

(2) 无穷大量是针对自变量的某一变化趋势而言的；

(3)“极限为 ∞”说明极限不存在.

三、无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小时，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

习　　题 1.4

1. 指出下列各题中，哪些是无穷小，哪些是无穷大.

(1) $\dfrac{1+x}{\sin x}(x \to 0)$；　　(2) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n (n \to \infty)$；

(3) $e^{-x}(x \to +\infty)$；　　(4) $\dfrac{x+1}{x^2-4}(x \to 2)$.

2. 利用无穷小的性质，求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x}$；　　(3) $\lim\limits_{x \to 0} x\arctan\dfrac{1}{x}$.

3. 比较下列无穷小的阶.

(1)x^3 与 $x(x\to 0)$；(2) $\frac{1}{x}$ 与$\frac{1}{x^2}(x\to\infty)$；(3)$x$ 与 $x\cos x(x\to 0)$.

4. 利用无穷小等价替换原理，求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\arctan x}$.

§1.5　极限运算法则

极限定义为我们提供了一种求极限的方法，但这种方法使用起来很不方便，并且在大多数情形下也是不可行的. 这一节我们将给出极限的若干运算法则，应用这些法则将帮助我们比较方便地进行有关极限的计算.

一、极限的四则运算法则

定理 1.4　若极限$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$ 与$\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$ 皆存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)$；

推论 1　$\lim\limits_{x\to\Delta}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)$($C$ 为常数)；

推论 2　$\lim\limits_{x\to\Delta}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)\right]^n(n>0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)}{\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)}(\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)\neq 0)$.

例 1　求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}$.

解　因为$\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}=\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{1-0+0}{2+0-0}=\frac{1}{2}.$$

例 2　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-3\cos x+\sin x+4)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}(x^3-3\cos x+\sin x+4)=\lim\limits_{x\to0}x^3-3\lim\limits_{x\to0}\cos x+\lim\limits_{x\to0}\sin x+\lim\limits_{x\to0}4$

$$=0-3\times1+0+4=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$=\left(1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right)=1\times2=2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)}=-1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

二、两个重要的极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

注意：

该重要极限在极限计算中有重要作用，它在形式上有以下特点：

(1) 它是$\dfrac{0}{0}$型未定式；

(2) 它可以写成$\lim\limits_{\square\to0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$（$\square$代表同样的变量或同样的表达式）；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

例 3　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{2x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin7x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\sin5x}{5x}\right]=\dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{5x}=\dfrac{5}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin7x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{7x}{3x}\cdot\dfrac{\sin3x}{\sin7x}\right]=\dfrac{3}{7}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}\cdot\dfrac{7x}{\sin7x}=\dfrac{3}{7}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$.